Egzamin „poprawkowy” z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 19 II 2018 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie *Bolzano - Weierstrassa* (dotyczące podciągów).

A. b) [3 pkt] Podaj przykład takiego ciągu ograniczonego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, że

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

oraz dla każdego $N \in \mathbb{N}$ ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant N}$ **NIE** jest monotoniczny.

VERTE

B. [9 pkt] Sformułuj twierdzenie *„o granicy sumy ciągów”* (będące częścią twierdzenia ***„o rachunkowych własnościach granicy”***). Udowodnij je dla szczególnego przypadku obu ciągów zbieżnych.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [**4 pkt**] Sformułuj **jedno** wybrane spośród dwóch kryteriów zbieżności szeregów: ***d'Alemberta*** oraz ***Cauchy'ego***.

A. b) [**za 6** poprawnych **5 pkt, za 5** popr. **4 pkt, za 4** popr. **2,5 pkt, za 3** popr. **1 pkt; inne 0 pkt**]
Zdecyduj o prawdziwości każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce (brak wpisu, wpisy nieczytelne, niejasne itp liczą się jak odpowiedzi błędne):

☐ Liczba $\mathbf{ln}\left(\frac{1}{2}\right)$ jest sumą pewnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o wszystkich wyrazach a_n dodatnich (tj. > 0).

☐ Liczba $\boldsymbol{e}$ jest sumą pewnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o wszystkich wyrazach a_n wymiernych.

☐ Liczba $\boldsymbol{e}$ jest sumą pewnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o wszystkich wyrazach a_n całkowitych.

☐ Liczba **2,7** jest sumą pewnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o wszystkich wyrazach a_n wymiernych.

☐ $\boldsymbol{e^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n!}$ dla pewnego ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ o wszystkich wyrazach całkowitych.

☐ Liczba $\boldsymbol{e^2}$ jest sumą pewnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o wszystkich wyrazach a_n niewymiernych.

VERTE

B. [6 pkt] Rozstrzygnij, czy istnieje taki **rozbieżny** szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 a_n$ jest zbieżny.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie **Bolzano** (o własności Darboux).

A. b) [3 pkt] Podaj definicję ciągłości funkcji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie a $(a \in D \subset \mathbb{R})$.

A. c) [2 pkt] Wskaż przykład **jednostajnie ciągłej** funkcji $f : (1;2) \longrightarrow (7;10)$, która nie jest wielomianem.

VERTE

B. [6 pkt] Rozstrzygnij, czy istnieje taka funkcja **nieciągła** $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, która „osiąga swoje kresy" (tzn. istnieją takie $x_1, x_2 \in [0; 1]$, że $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [0; 1]\}$ oraz $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}$).

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* B *— **musi być dowód.***

A. a) [3=3x1 pkt] W każdej ramce podaj wartość odpowiedniej granicy funkcji, o ile istnieje; natomiast gdy nie istnieje, wpisz "BRAK":

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$ $\boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$ $\boxed{}$

A. b) [3 pkt] Znajdź 3-ci wielomian Taylora o środku w $x_0 = 0$ dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = 1 + x + e^x$.

VERTE

B. [9 pkt] Podaj sformułowanie twierdzenia **o pochodnej iloczynu dwóch funkcji** i przedstaw jego dowód (chodzi o część twierdzenia „O własnościach rachunkowych pochodnej”).

Egzamin „poprawkowy” z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 19 II 2018 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te należy wskazywać****, najlepiej podając ich nazwę, ew. sformułowanie.*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.
Wykaż istnienie granic (ze zbioru $\overline{\mathbb{R}}$) i znajdź je dla ciągów o n-tych wyrazach zadanych następująco:

a) $a_n = \left(\frac{2018}{2017} + \frac{1}{n}\right)^n$, **b)** $b_n = \left(\frac{2017}{2018} + \frac{1}{n}\right)^n$.

Zadanie 2.
Zbadaj zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{n}{200} + 5 + \left(\frac{10}{11}\right)^n}.$$

Zadanie 3.
O funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zakładamy, że jest ciągła oraz że
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Wykaż, że równanie $2f(x) = \sin(x)$ ma pewne rozwiązanie $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.
Funkcja $g : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $g(x) := (4x^2 + 3)e^{(-x)}$ dla $x \geqslant 0$.
Wykaż, że g osiąga wartość największą i znajdź tę wartość **lub** wykaż, że g nie osiąga wartości największej.
Wskazówka: $\left(\frac{13}{5}\right)^3 = 17,576$.