# Kolokwium z Analizy Matematycznej
## dla Informatyków, 10 V 2018 (ok. godz. 14.15)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:*

  **w lewym górnym rogu** *imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*

  **w prawym górnym rogu** *numer grupy ćwiczeniowej (można będzie ew. uzupełnić podczas sprawdzania obecności).*

- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, telefonów, kalkulatorów, pomocy sąsiadów, itp.*

- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***

- *Każde z zadań warte jest **17,5 pkt**. Czas na rozwiązanie zadań: **3 godz**.*

**Zadanie 1.**
Rozważamy funkcję $F : (0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(nx)}{n}, \qquad x \in (0; 1).$$

**(A)** Wyjaśnij, dlaczego powyższy wzór poprawnie definiuje funkcję z $(0; 1)$ w $\mathbb{R}$.

**(B)** Udowodnij, że $F$ jest różniczkowalna.

**(C)** Zbadaj, czy $F'$ jest ciągła.

**(D)** Znajdź pierwszy wielomian Taylora $T_1$ funkcji $F$ o środku w 0 i podaj jego wartość w punkcie 7 (tzn. oblicz $T_1(7)$).

**Zadanie 2.**
Oblicz $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2}(\ln(n+k) - \ln n)$ lub wykaż, że powyższa granica nie istnieje.

**Zadanie 3.**

**(A)** Zdefinujmy funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x) := \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, dla $x \neq 1$. Znajdź wszystkie funkcje pierwotne funkcji $f$. Czy istnieje wśród nich taka funkcja pierwotna, która ma skończoną granicę w punkcie 1? **Przypomnienie:** np. $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1}$.

**(B)** Oblicz całkę niewłaściwą (mieszaną) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,dx$ lub wykaż, że całka ta nie jest zbieżna.

**Zadanie 4.**
Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = (x_1x_2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$ dla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Niech $G := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2\}$ oraz $H := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 2\}$.

**(A)** Wykaż, że $f|G$ przyjmuje swą wartość największą i swą wartość najmniejszą.

**(B)** Znajdź wszystkie ekstrema lokalne $f$ i rozstrzygnij czy są one maksimami, czy minimami lokalnymi. **Wskazówka:** wyznacz i naszkicuj $f^{-1}(\{0\})$.

**(C)** Zbadaj, które ze **swych** kresów osiąga funkcja $f|H$.