Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 6 IX 2018 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5=3+2 pkt] Podaj definicje wszystkich znanych Ci rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, gdzie $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dla $n \geqslant 1$ oraz $D \subset \mathbb{R}$ jest pewnym przedziałem. Podaj definicję normy $\|g\|$ (tzw. *normy supremum*) dla $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ i wyjaśnij związek tego pojęcia ze zbieżnościa jednostajną.

A. b) [3 pkt] Podaj przykład szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, który jest zbieżny jednostajnie, a wszystkie funkcje $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz suma tego szeregu są nieciągłe.

VERTE

B.) [7=1+1+5 pkt] Zbadaj ciągłość oraz różniczkowalność funkcji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanych podanymi niżej wzorami dla $x \in D$:

- $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2018}}{n!}$ dla $D := \mathbb{R}$

- $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n}}{2018!}$ dla $D := (-1; 1)$

- $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{xn^{4}+1}$ dla $D := (0; +\infty)$

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję całki oznaczonej $\int_a^b f(t)\,dt$ dla funkcji $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ posiadającej funkcję pierwotną, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ — przedział, oraz $a, b \in I$.

A. b) [5 pkt] Podaj definicję całki górnej Riemanna, całki dolnej Riemanna oraz całkowalności w sensie Riemanna dla funkcji ograniczonej $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

VERTE

B. a) [4=3+1 pkt] Udowodnij, że jeśli ρ_1 i ρ_2 są metrykami w zbiorze X, to także $\rho := \rho_1 + \rho_2$ jest metryką w X. Czy można tu zastąpić $\rho_1 + \rho_2$ przez $\rho_1 - \rho_2$?

B. b) [3 pkt] Podaj przykład takiego ciągu $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$ podzbiorów otwartych $\mathbb{R}^2$, że ich przecięcie $P := \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ nie jest zbiorem otwartym (wykaż, że ten P nie jest otwarty).

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję różniczkowalności f i różniczki $(Df)(a)$ dla funkcji $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ w punkcie $a \in \mathbb{R}^m$.

A. b) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie „różniczka a pochodne kierunkowe i cząstkowe" (opisujące pochodne kierunkowe oraz cząstkowe przy pomocy różniczki funkcji).

A. c) [3 pkt] Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem

$$f(x) := 9 + x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Niech $a = (1, 0, 1)$. Znajdź macierz Jakobiego $(MJf)(a)$ funkcji f w punkcie a oraz podaj wartość różniczki $((Df)(a))\,(h)$ funkcji f w punkcie a na wektorze h dla $h = (7, 8, 9)$. Oblicz $\partial_v f(a)$ dla $v = (14, 16, 18)$.

VERTE

B. [6=4+2 pkt] Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej dla $x \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$g(x) = 4(x_1 + x_2)^2 - x_2^2.$$

Rozstrzygnij, czy $f := g|_A$ osiąga swój kres górny, gdy $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_1|}{50} + x_2^6 = 100\}$.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [6=3x2 pkt] Podaj przykład:

- pewnego σ-ciała $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ takiego, że $\{1\} \in \mathfrak{M}$, ale $\{2\} \notin \mathfrak{M}$,

- pewnej miary μ określonej na powyższym $\mathfrak{M}$, spełniającej $\mu(\mathbb{N}) = 2$ i $\mu(\{1\}) = 1$

- oraz pewnej funkcji $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ **nie**mierzalnej (względem powyższego $\mathfrak{M}$).

A. b) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie „o całkowaniu przez podstawienie" dla całki Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$.

VERTE

B. [5 pkt] Rozważamy dwie rodziny podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}_1 := \{[n; n+1): \ n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathcal{A}_2 := \{[n; n+2): \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wykaż, że $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 6 IX 2018 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2,5 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu (pomijając kroki zupełnie elementarne) powinny opierać się na twierdzeniach z wykładu i z ćwiczeń (w tym na: lematach, faktach itp.). Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \int_x^{(e^x-1)} \cos(t^2)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Znajdź $T_{2,0}$ — drugi wielomian Taylora tej funkcji o środku w $x_0 = 0$ oraz jego wartość w punkcie $x = 1$.

(ii) Oblicz $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^2}$, o ile ta granica istnieje.

Zadanie 2.

Zbadaj, czy istnieje granica

$$\lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{e^{\frac{kx}{n}}}$$

i jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.

Wskazówka: najpierw dla każdego $x > 0$ zajmij się kwestią granicy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^3}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{e^{\frac{kx}{n}}}$.

Zadanie 3.

Czy na przecięciu sfery w $\mathbb{R}^3$ o środku 0 i promieniu 1 oraz płaszczyzny o równaniu $x + y + z = 0$ istnieje punkt, którego odległość od punktu $(1, 1, 0)$ jest największa? Jeśli tak, to znajdź każdy z takich punktów.

Zadanie 4.

Niech R będzie równoległobokiem na płaszczyźnie (domkniętym, „z wnętrzem") o wierzchołkach $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 5)$, $(2, 6)$. Oblicz

$$\int_R e^{(x_1+x_2)}\, dx.$$