Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2018 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [**4 pkt**] Wskaż przykład ciągu funkcyjnego **lub** szeregu funkcyjnego, który jest zbieżny niemal jednostajnie, ale nie jest zbieżny jednostajnie. (I napisz, czy chodzi Ci o ciąg, czy o szereg.)

A. b) [**za <3 poprawne: 0 pkt; za 3 poprawne: 1 pkt; za 4 poprawne: 2 pkt; za wszystkie poprawne: 4 pkt**] Rozstrzygnij o prawdziwości dla wszystkicj ciągów/szeregów funkcyjnych każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Granica jednostajna ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną.

☐ Granica jednostajna ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐ Granica punktowa ciągu funkcji różniczkowalnych o pochodnych dodatnich jest funkcją monotoniczną.

☐ Suma zbieżnego punktowo szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ o wszystkich wyrazach $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłych i spełniających $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, jest funkcją ciągłą.

☐ Suma zbieżnego punktowo szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ o wszystkich wyrazach $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnych i spełniających $0 \leqslant f_n'(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, jest funkcją różniczkowalną.

VERTE

B.) [7=2+5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o wartości średniej*** (dla całki) i przedstaw jego dowód.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.

Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...)* — *bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4=1+1,5+1,5 pkt] Podaj definicję kuli otwartej $K(a,r)$ o środku a i promieniu r oraz definicję zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej (X,ρ). Czy zbiór jednopunktowy $\{7\}$ jest otwarty dla jakiejś metryki ρ w $\mathbb{R}$? — Jeśli tak, to podaj przykład takiej metryki.

A. b) [4=2+2 pkt] Podaj dwa warunki równoważne domkniętości zbioru $A \subset X$ w przestrzeni metrycznej (X,ρ), **w tym definicję** domkniętości. Czy przeciwobraz względem funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zbioru $[0;1)$ może być domknięty (przy metrykach euklidesowych dla $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$)? — Jeśli tak, to podaj przykład takiej funkcji f i wskaż $f^{-1}([0;1))$.

VERTE

B.) [7 pkt] Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją dodatnią (tzn. > 0). Określamy $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\rho(x, y) := \int_{[x?y]} f(t)\, dt$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wykaż, że ρ jest metryką w $\mathbb{R}$ (przypomnienie: $[x?y] = [x; y]$, gdy $x \leqslant y$ oraz $[x?y] = [y; x]$, gdy $y \leqslant x$).

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję różniczkowalności f oraz różniczki $(Df)(a)$ dla funkcji $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ w punkcie $a \in \mathbb{R}^m$.

A. b) [3=1,5+1,5 pkt] Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zadana jest wzorem

$$f(x) := (x_1 + 7x_2x_3,\ x_1x_2 + e^{x_3}), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Znajdź macierz Jakobiego funkcji f w punkcie 0 oraz podaj wartość różniczki funkcji f w punkcie 0 na wektorze $(1, 1, 6)$.

A. c) [3 pkt] Funkcja $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $G(0, 0, 1) = \pi$ oraz $(\operatorname{grad} G)(0, 0, 1) = (1, 2, 3)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x) := G(x, x^2, e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Znajdź $T_{1,f,0}$ — pierwszy wielomian Taylora funkcji f o środku w 0 i podaj jego wartość w punkcie $x = 2$.

VERTE

B. [6 pkt] Zbadaj, czy funkcja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ określona dla $x \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_1 = 0 \\ x_2 & \text{dla } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie 0.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [6=3x2 pkt] Niech X będzie pewnym zbiorem, $\mathfrak{M}$ — pewną rodziną podzbiorów zbioru X, $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0; +\infty]$ oraz $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dokończ definicje poniżej:

- $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem podzbiorów X $\iff$

- μ jest miarą $\iff$

- f jest mierzalna $\iff$

A. b) [tylko przy samych poprawnych 3 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości poniższych zdań dla wszystkich $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Jeśli $\exp \circ f$ jest mierzalna, to f jest mierzalna.

☐ Jeśli f^2 jest mierzalna, to f jest mierzalna.

☐ Jeśli f^3 jest mierzalna, to f jest mierzalna.

Uwaga: tu $f^k(x) := (f(x))^k$ dla $x \in X$.

VERTE

B. [6 pkt] Wykaż następujący

Fakt *(szczególny przypadek faktu dot. mierzalności względem σ-ciała generowanego).*

Załóżmy, że $\mathfrak{M}$ jest ustalonym dla X σ-ciałem jego podzbiorów oraz $\mathcal{A}$ jest taką rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$, że $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Wówczas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{A \in \mathcal{A}}\ f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2018 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2,5 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach z wykładu, ew. także z ćwiczeń (w tym: lematach, faktach itp.). Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

Zbadaj, czy istnieje granica

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{x^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{1+\left(\frac{kx}{n}\right)^8}$$

i jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.

Wskazówka: najpierw dla każdego $x>0$ zajmij się kwestią granicy $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{1+\left(\frac{kx}{n}\right)^8}$; może przydać się też kiedyś spostrzeżenie, że $a^8=(a^4)^2\ldots$

Zadanie 2.

Znajdź, jeżeli istnieje, taki spośród punktów leżących na przecięciu dwóch sfer w $\mathbb{R}^3$:

pierwszej: o środku 0 i promieniu 1

drugiej: o środku $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ i promieniu $\frac{\sqrt{7}}{2}$,

którego odległość od punktu $(1,1,0)$ jest najmniejsza.

Zadanie 3.

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ określonej dla $x\in\mathbb{R}^2$ wzorem

$$g(x)=\int_{2(x_1+x_2)}^{x_2} t\,dt$$

Rozstrzygnij, czy $f:=g|_A$ osiąga swój kres górny, gdy

$$A:=\{x\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x_1^3+x_2^6\leqslant 10,\ |x_2|\leqslant 1000\}.$$

Zadanie 4.

Niech W będzie „ćwiartką walca obrotowego”

$$W:=\{x\in\mathbb{R}^3 :\ 0\leqslant x_1,\ 0\leqslant x_2,\ x_1^2+x_2^2\leqslant 1,\ 0\leqslant x_3\leqslant 7\}.$$

Oblicz $\int_W x_1x_2x_3\,dx.$