Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej 7 XII 2017

Uwaga, w poniższych zadaniach:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$;
- *norma dla wskazanych przestrzeni unormowanych jest przyjęta jako ta standardowo w nich rozważana, jeśli nie została określona inaczej;*
- *na* $[a; b]$ *jako miarę wybieramy miarę Lebesgue'a.*

Czas: 3 godz.

---

1. Niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$), które są ciągłe i ograniczone oraz spełniają warunek
$$3f(3) = 2f(2) + f(1).$$
Określamy $\|f\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ dla $f \in X$. Wykaż, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią liniową unormowaną nad $\mathbb{K}$. Czy jest ona przestrzenią Banacha?

   Pytanie dodatkowe: Czy $(X, \|\cdot\|_*)$ jest przestrzenią unormowaną zupełną, gdy dla $f \in X$ określimy $\|f\|_* := |f(0)| + \|f\|$?

2. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f_n(t) = \begin{cases} n^\alpha t & \text{dla} \quad t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant \frac{1}{n}, \end{cases}$
gdzie $\alpha \geqslant 1$ jest pewnym parametrem. Wyznacz zbiór wszystkich parametrów $\alpha \geqslant 1$ takich, że $\{[f_n]\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny jako ciąg wektorów z przestrzeni
   a) $L^3([0; 1])$, **b)** $L^\infty([0; 1])$
oraz znajdź granicę tego ciągu dla α z wyznaczonego zbioru parametrów (tu, dla funkcji g, symbol $[g]$ oznacza odpowiednią klasę funkcji wyznaczoną przez g).

3. Dla jakich $p \in [1; +\infty]$ wzór
$$T\left(\{x_n\}_{n\geqslant 1}\right) := \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}_{n\geqslant 1}$$
poprawnie zadaje przekształcenie liniowe i ciągłe z $l^p(\mathbb{N})$ w przestrzeń c? (c to podprzestrzeń przestrzeni $l^\infty(\mathbb{N})$ złożona z ciągów zbieżnych). Dla wszystkich takich p wyznacz $\|T\|$.

4. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta $l^2(\mathbb{N})$ oraz
$$V := \{x \in l^2(\mathbb{N}) : \ x_1 + 2x_3 = 0 \ \text{ i } \ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$
   a) Znajdź podprzestrzeń $V^\perp$ oraz podaj jej wymiar (jako przestrzeni liniowej).

   b) Niech $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ będą rzutami ortogonalnymi w $\mathcal{H}$, odpowiednio na V oraz na $V^\perp$. Znajdź $P_1 a$ i $P_2 a$ dla $a = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\geqslant 1}$.

5. Dla przestrzeni Hilberta H rozważamy operator liniowy $T : H \longrightarrow H$, spełniający dla każdego $x \in H$ warunek
$$(Tx, x - Tx) = 0.$$
Rozstrzygnij, czy operator T musi być: **a)** ciągły, **b)** rzutem ortogonalnym na pewną podprzestrzeń (domkniętą) przestrzeni H.