Egzamin AF - sem. zim. 2017/18 - termin II (poprawkowy) 20 II 2018

Część pierwsza — 2 godz.

Uwaga: w tej części tylko wtedy należy podawać uzasadnienia/dowody, **gdy jest o to prośba w poleceniu**.

1. **[50 p.] Podaj:**

(i – 4 p.) przykład pewnej przestrzeni Banacha X (wyjaśnij jaka jest norma w X) i jej podprzestrzeni liniowej Y, która nie jest przestrzenią Banacha:

(ii – 4 p.) przykład dwóch **nie**równoważnych norm $\| \|_a$ oraz $\| \|_b$ w przestrzeni **liniowej** $l^1(\mathbb{N})$:

(iii – 4 p.) przykład niezerowego funkcjonału $\varphi \in X^*$ dla $X = L^3([0; 1])$:

(iv – 4 p.) definicję normy (operatorowej) operatora liniowego ciągłego T pomiędzy przestrzeniami unormowanymi X i Y:

(v – 4 p.) definicję rzutu ortogonalnego $P_Y(x)$ wektora x z przestrzeni Hilberta H na jej podprzestrzeń (domkniętą) Y (**lub** inne równoważne sformułowanie warunków tej definicji):

(vi – 4 p.) definicję układu ortogonalnego i układu ortonormalnego:

(vii – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „O bazie ortonormalnej" (o warunkach równoważnych dla układu ortonormalnego na to, by był on bazą ortonormalną):

(viii – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „Ciągłe twierdzenie Hahna– Banacha" (— t.j., o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych ciągłych):

(ix – 4 p.) sformułowanie „lematu o (operatorze) odwrotnym do $(I - A)$" (tzn. twierdzenia o pewnych warunkach na operator A gwarantujących odwracalność operatora $I - A$ oraz o własnościach odp. operatora odwrotnego):

(x – 10 p.) dowód powyższego twierdzenia (lematu) — *na osobnej kartce*

(xi – 4 p.) przykład pewnego nieskończonego ograniczonego zbioru $W \subset \mathbb{C}$, jego podzbioru W' oraz pewnego operatora ograniczonego A, takich że W jest widmem A oraz W' jest zbiorem wartości własnych A (tzn. $W = \sigma(A)$ i $W = \sigma_p(A)$):

Egzamin AF - sem. zim. 2017/18 - termin II (poprawkowy) 20 II 2018

część druga (zadania od nr 2. do 5.) — **2 godz.**

Niektóre oznaczenia, umowy itp:

- $l^\infty(D)$ — przestrzeń funkcji ograniczonych określonych na zbiorze D (w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$);
- **w zadaniach 2. i 3.** klasa wszystkich funkcji mierzalnych równych prawie wszędzie danej funkcji jest utożsamiana z samą tą funkcją;
- χ_D — funkcja charakterystyczna zbioru D, tzn. $\chi_D(t) := \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad t \in D \\ 0 & \text{dla} \quad t \notin D \end{cases}$;
- $\mathbb{N} := \{\mathbf{1}, 2, \ldots\}$.

2. **[12,5 p.]**
W przestrzeni Hilberta $H = L^2(\mathbb{R})$ rozważamy podzbiór $M := \left\{ f \in H : \ \forall_{k \in \mathbb{Z}} \ \int_{[k;\,k+1]} f(t)\,dt = 0 \right\}$.

a) Znajdź $M^\perp$.

b) Wykaż, że M jest podprzestrzenią domkniętą.

c) Znajdź rzut ortogonalny g na M dla funkcji g zadanej wzorem $g(t) = e^{-|t|}$ $(t \in \mathbb{R})$.

3. **[12,5 p.]**
Niech $1 < p < \infty$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważamy $f_n : [1;\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f_n := \chi_{[n;\,n+1)}$ (patrz oznaczenia).

(a) Wykaż, że dla każdego $x = \{x_n\}_{n \geqslant 1} \in l^p(\mathbb{N})$ poniższy szereg w przestrzeni $L^\infty([1;\infty))$ jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}\, f_n.$$

(b) Określamy $T : l^p(\mathbb{N}) \longrightarrow L^\infty([1;\infty))$ wzorem: $Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}\, f_n$ dla $x \in l^p(\mathbb{N})$, $x = \{x_n\}_{n \geqslant 1}$.
Wykaż ciągłość T.

(c) Rozstrzygnij, czy powyższy T jest operatorem zwartym.

4. **[12,5 p.]**
Operator liniowy A z przestrzeni $C([0;1])$ w przestrzeń $l^\infty(\mathbb{R})$ ma następującą własność:

> *dla każdego ciągu funkcyjnego* $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ *funkcji ciągłych na* $[0;1]$, *jeżeli ten ciąg jest zbieżny* **jednostajnie** *do pewnej funkcji* f, *to ciąg funkcyjny* $\{Af_n\}_{n \geqslant 1}$ *jest zbieżny* **punktowo** *do funkcji* Af.

Udowodnij, że operator A jest ciągły.

5. **[12,5 p.]**
Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz H_1 i H_2 jej domkniętymi podprzestrzeniami. Oznaczmy przez P_1 i P_2 rzuty ortogonalne w H odpowiednio na H_1 i na H_2. Udowodnij, że jeżeli $H_1 \subset H_2$, to dla każdego $x \in H$ zachodzi $P_1(P_2x) = P_1x$.