Egzamin AF - sem. zim. 2017/18 - termin I 3 II 2018

Część pierwsza — 2 godz.

Uwaga: w tej części tylko wtedy należy podawać uzasadnienia/dowody, **gdy jest o to prośba w poleceniu**.

1. [**50 p.**] **Podaj:**

(i – 3 p.) definicję normy (operatorowej) operatora liniowego ciągłego T pomiędzy przestrzeniami unormowanymi X i Y:

(ii – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „Zasada minimalnej odległości" (— o odległości punktu od podzbioru w przestrzeni Hilberta):

(iii – 12 p.) dowód powyższej „Zasady minimalnej odległości" — *na osobnej kartce*

(iv – 3 p.) definicję funkcjonału Banacha:

(v – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „Abstrakcyjne twierdzenie Hahna– Banacha" (— czyli tw. Hahna–Banacha o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych dominowanych przez funkcjonał Banacha):

(vi – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „Ciągłe twierdzenie Hahna– Banacha" (— t.j., o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych ciągłych):

(vii – 8 p.) **szkic** dowodu twierdzenia „Ciągłe twierdzenie Hahna– Banacha" **w przypadku przestrzeni zespolonej**: — *na osobnej kartce*

(viii – 4 p.) sformułowanie twierdzenia Riesza „O postaci funkcjonału ograniczonego na przestreni Hilberta":

(ix – 3 p.) definicję operatora liniowego zwartego T pomiędzy przestrzeniami unormowanymi X i Y:

(x – 5 p.) Przykład takiego nieskończonego ograniczonego zbioru $D \subset \mathbb{C}$ oraz operatora ograniczonego A, działającego w pewnej przestrzeni Banacha, że D jest zbiorem wartości własnych operatora A, ale nie jest jego widmem:

Egzamin AF - sem. zim. 2017/18 - termin I 3 II 2018

część druga — 2 godz.

Tu: $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$.

---

2. **[12,5 p.]** Dla parametru $q \in (0; 1)$ rozważamy operator $S_q : c_0 \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N})$ określony wzorem:

$$(S_q x)_k := \sum_{j=1}^{k} q^j x_j, \quad \text{dla } x \in c_0 \text{ oraz } k \in \mathbb{N}.$$

a) Wykaż ciągłość S_q.

b) Określmy $T_n := S_{1/n}$ dla wszystkich $n \geqslant 2$. Zbadaj, czy ciąg $\{T_n\}_{n \geqslant 2}$ jest zbieżny w przestrzeni operatorów ograniczonych z c_0 w $l^\infty(\mathbb{N})$. Jeśli jest zbieżny, znajdź jego granicę.

3. **[12,5 p.]** Liniowy operator B z przestrzeni $l^1(\mathbb{N})$ w przestrzeń $C([0; 1])$ ma następującą własność:

dla każdego $a \in l^1(\mathbb{N})$ i dla każdego takiego ciągu $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ złożonego z wektorów z $l^1(\mathbb{N})$, że $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ jest zbieżny do a w $l^1(\mathbb{N})$, zachodzi $\lim_{n \to +\infty} (Bx_n)(t) = (Ba)(t)$ przy każdym $t \in [0; 1]$

Udowodnij, że operator B jest ograniczony.

4. **[12,5 p.]** Dane są: podprzestrzeń domknięta Y przestrzeni Hilberta H taka, że $Y \neq H$, oraz funkcjonał $\varphi \in Y^*$ o normie równej 1. Wykaż, że istnieje taki funkcjonał $\psi \in H^*$, że:

$$\psi|_Y = \varphi \qquad \text{oraz} \qquad \|\psi\| = \sqrt{2}.$$

Pytanie dodatkowe: Czy, gdy ciałem skalarów dla H jest $\mathbb{C}$, to zbiór wszystkich takich rozszerzeń ψ jest skończony?

5. **[12,5 p.]** W przestrzeni Hilberta H dane są wektory $e_1, e_2, e_3, \ldots$ oraz przekształcenie liniowe $T : H \longrightarrow H$. Zakładamy, że $\{e_n\}_{n \geqslant 1}$ jest bazą ortonormalną w H, operator T jest ciągły oraz że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $Te_n = \frac{1}{n} e_n$.

(i) Znajdź normę operatora T.

(ii) Wykaż, że T jest operatorem zwartym.

(iii) Wyznacz spektrum operatora T.