II Operatory ograniczone, funkcjonały

Omawiamy tu wstępne sprawy dotyczące operatorów liniowych – głównie operatorów ciągłych (=ograniczonych...) pomiędzy przestrzeniami unormowanymi.
W szczególności będzie tu mowa o równoważnych warunkach ciągłości operatorów liniowych, o izomorfizmach (przestrzeni unormowanych, o przestrzeni $B(X,Y)$ (– pewnej nowej konstrukcji przestrzeni unormowanych) i o ciągłości funkcjonałów liniowych – w tym o przestrzeni sprzężonej X^*. To wszystko jednak na razie tylko w „podstawowym zakresie" – głębsze wyniki dotyczące tych wszystkich spraw będą omawiane w dalszych rozdziałach.

Spora liczba przykładów operatorów ograniczonych – w tym pewnych ich ważnych ogólnych klas (np. operatory mnożenia, przesunięcia, „trójdiagonalne"), a także przykładów całkiem konkretnych (np. transformata Fouriera), opisana jest w głównym – pierwszym podrozdziale.

Podrozdziały

1. Ograniczoność i norma operatorowa

1.0. Przypomnienie i notacja dla operatorów liniowych

Niech X, Y – przestrzenie liniowe nad $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$, jak zwykle). W dalszym ciągu tego kursu AF I będziemy na ogół na przekształcenie liniowe $A : X \longrightarrow Y$ mówili krótko **operator** *) (z X w Y). Przypominam, że $\mathcal{L}(X,Y)$ to zbiór i zarazem przestrzeń liniowa wszystkich (liniowych ...) operatorów z X w Y (patrz np. str. PB-3).

Ponadto oznaczamy:

$$X^{\#} := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

i elementy tego zbioru (przestrzeni) będziemy nazywali funkcjonałami liniowymi, również często skracając to do samego „funkcjonał" (z liniowością w domyśle ... + zastrzeżenie podobne do tego z *) ...)

Dla $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ oraz $x \in X$ często używamy skrótu:

$$Ax := A(x).$$

Poza znanymi działaniami dodawania operatorów liniowych i mnożenia

---

*) Choć oczywiście nie każde przekształcenie (funkcja) pomiędzy przestrzeniami liniowymi musi być liniowe – jednak będziemy starali się używać słów „przekształcenie", „funkcja", gdy nie zakładamy liniowości ... (a nie „operator")

poza liczby z $\mathbb{K}$ warto pamiętać o mnożeniu operatorów, zdefiniowanym po prostu jako złożenie, tzn.

dla X, Y, Z - liniowych i $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$

oznaczamy (również skrótowo):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & Y \arrow[r, bend left, "A"] & Z \end{tikzcd}$$

$$AB := A\cdot B := A\circ B$$

i AB nazywamy iloczynem A i B – oczywiście $AB \in \mathcal{L}(X,Z)$.

W szczególnym wypadku, gdy $X = Y$, oznaczamy krócej

$$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$$

i ważnymi elementami $\mathcal{L}(X)$ są również 0 i I – operator zerowy (tzn. $\forall_{x\in X}\ 0x = 0$) i odpowiednio identycznościowy (tzn. $\forall_{x\in X}\ Ix = x$).

Jak wiadomo (ew. łatwo sprawdzić...) $(\mathcal{L}(X), \cdot, I)$ jest algebrą z jedynką nad $\mathbb{K}$ *).

Co więcej oczywiście

$$0 = I \quad \text{wtw} \quad X = \{0\}. \qquad (0I)$$

---

*) Gdy $\mathcal{A}$ przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$, $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$, $\cdot : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, to $(\mathcal{A}, \cdot, \mathbb{1})$ jest algebrą z jedynką nad $\mathbb{K}$ wtw $\forall_{\substack{a,b,c\in\mathcal{A}\\ \lambda\in\mathbb{K}}}$ 1) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
2) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ 3) $\lambda(a\cdot b) = (\lambda a)\cdot b = a\cdot(\lambda b)$
4) $\mathbb{1}\cdot a = a\cdot\mathbb{1} = a$.

Uwaga: niektórzy (my NIE – patrz (0I)) zakładają „z góry", że $\mathbb{1} \neq 0$.

1.1. Ograniczony = ciągły

Niech teraz X, Y – przestrzenie unormowane.

◆ Operatory ograniczone

Definicja

Niech $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operator A jest <u>ograniczony</u> wtw dla każdego ograniczonego podzbioru C w X zbiór $A(C)$ jest ograniczony w Y.

Uwaga!

Należy być ostrożnym, bo to myląca terminologia: mimo, że operator (liniowy) jest w szczególności funkcją, to termin <u>operator ograniczony</u> jest czymś istotnie różnym od "funkcja liniowa i ograniczona". Co gorsza, każdy operator A liniowy różny od 0 (pomiędzy przestrzeniami unormowanymi) <u>nie jest</u> funkcją ograniczoną – tzn. $A(X)$ nie jest ograniczony w Y, bo $\{0\} \neq A(X) = \mathrm{Ran}(A) \underset{lin}{\subset} Y$. Niemniej jest pewien prosty związek pojęcia ograniczoności operatora i pojęcia ograniczoności funkcji (patrz Wniosek str.6)*).

---

*) (o "(jeszcze) gorsza", w Teorii Operatorów używa się też dość powszechnie nazwy „operator nieograniczony", co niekiedy wcale nie jest zaprzeczeniem pojęcia ograniczoności w klasie operatorów liniowych, ale wręcz pewnym rozszerzeniem pojęcia operatora liniowego z X w Y... (rozważa się operatory liniowe określone na jakichkolwiek podprzestrzeniach liniowych $\tilde{X} \subset X$ o wartościach w Y).

Uwaga 2

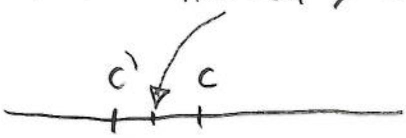
Jeśli $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ oraz $X \neq \{0\}$ *), to

$$\sup_{\|x\|<1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

Dowód

Oczywiście $c := \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$ jest ograniczeniem górnym zbioru $D := \{\|Ax\| : x\in K(0,1)\}$ lub jest równe $+\infty$. Jeżeli zatem $c' < c$, to dla pewnego $x_0\in\overline{K}(0,1)$ $\|Ax_0\| > c'$.

Ale $\forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ x_n := (1-\frac{1}{n})x_0 \in K(0,1)$, więc $x_n\in D$



oraz $\|Ax_n\| = \|(1-\frac{1}{n})Ax_0\| = (1-\frac{1}{n})\|Ax_0\| \xrightarrow[n]{} \|Ax_0\| > c'$.

Zatem dla pewnego $n\in\mathbb{N}_1$ $\|Ax_n\| > c'$, więc c' nie jest ograniczeniem górnym D. Czyli $c = \sup D$, co oznacza pierwszą równość.

Druga jest jasna stąd, że $S(0,1)\subset\overline{K}(0,1)$ oraz że dla $0\neq x\in\overline{K}(0,1)$ $\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|}x \in S(0,1)$ i $\|A\tilde{x}\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \geqslant \|Ax\|$.

▨

---

*) Gdy jednak $X=\{0\}$, to pierwsza z „=" zachodzi – po obu stronach są 0. Druga nie ma zaś sensu, bo $S_X(0,1)=\emptyset$...

Uwaga 3

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$ jest ograniczony wtw $A(\overline{K}(0,1))$ (równoważnie też: $A(K(0,1))$, a również $A(S(0,1))$) jest ograniczony w Y.

Dowód „$\Longrightarrow$" – jasne

„$\Longleftarrow$". Równoważność wyboru $K(0,1)$, $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ wynika z Uwagi 2. Załóżmy, że $A(\overline{K}(0,1))$ jest ograniczony – niech $M \in \mathbb{R}$ będzie taki, że $A(\overline{K}(0,1)) \subset \overline{K}(0,M)$.

Jeżeli C – ograniczony podzbiór X, to dla pewnego $r>0$ $C \subset \overline{K}(0,r)$, czyli $\frac{1}{r} \cdot C \subset \overline{K}(0,1)$, skąd

$$A\left(\tfrac{1}{r}C\right) \subset \overline{K}(0,M)$$

Ale $A(C) = r \cdot A\left(\frac{1}{r}C\right)$ dzięki liniowości A, więc

$$A(C) \subset r \cdot \overline{K}(0,M) = \overline{K}(0, r\cdot M).$$ $\boxed{\text{Γ/L}}$

Dla $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mamy zatem:

Wniosek A jest operatorem ograniczonym wtw $A|_{\overline{K}(0,1)}$ (równoważnie ... $|_{K(0,1)}$ / ... $|_{S(0,1)}$) jest funkcją ograniczoną.

„Ważne warunki równoważne"

Poza warunkami równoważnymi ograniczoności z Uwagi 3 są jeszcze inne – pozornie bardziej zaskakujące (w tym głównie ten z poniższego tytułu ...)

Fakt („O warunkach równoważnych ciągłości")

Jeżeli $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, to NWSPR *)

(i) A jest ograniczony (tzn. jako operator...);

(ii) A jest ciągły w 0;

(iii) A jest ciągły;

(iv) A jest jednostajnie ciągły;

(v) A jest lipschitzowski;

(vi) $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X} \quad \|Ax\| \leq C\|x\|$;

(vii) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

Dowód

(i) $\Leftrightarrow$ (vii) – jasne z Uwagi 3.

(vii) $\Leftrightarrow$ (vi) „$\Leftarrow$" – oczywiste. „$\Rightarrow$" niech $C := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

---

*) NWSPR = NWSR = „następujące warunki są równoważne (tzn. parami równoważne ...)".

dla $x \neq 0$ $\quad x = \|x\| \cdot \tilde{x}$, $\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|} \cdot x \in \overline{K}(0,1)$ więc (liniowość A i wł. normy) $\|Ax\| = \|x\| \cdot \|A\tilde{x}\| \leq \|x\| \cdot C$, skąd (vi).

(vi) $\Rightarrow$ (v) $\quad$ z (vi) istnieje $C \in \mathbb{R}$ t.że $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq C\|x-y\|$ dla wszystkich $x, y \in X$.

(v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) — oczywiste.

(ii) $\Rightarrow$ (vi) $\quad$ Jeżeli A - ciągły w 0, to istnieje $r > 0$ t. że $K_X(0,r) \subset A^{-1}(K_Y(A(0),1)) = A^{-1}(K_Y(0,1))$.
Zatem gdy $\|x\| < r$, to $\|Ax\| < 1$, czyli gdy $0 \neq x$, to $\left\|\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\right\| = \frac{r}{2} < r$, więc

$$\|Ax\| = \frac{2\|x\|}{r} \cdot \left\|A\left(\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\right)\right\| \leq \frac{2}{r}\|x\|.$$

$\boxed{\square}$

Norma operatorowa

Oznaczmy

$$B(X,Y) := \{A \in \mathcal{L}(X,Y) : A - \text{ograniczony}\}$$

— na razie to „jedynie" pewien zbiór, podzbiór $\mathcal{L}(X,Y)$, który na mocy poprzedniego faktu równy jest $\{A \in \mathcal{L}(X,Y) : A - \text{ciągły}\}$.
Również dzięki temu faktowi możemy zdefiniować

$\|\ \| : B(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ wzorem

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad A \in B(X,Y). \qquad \text{(NO)}$$

Jak się niedługo przekonamy (patrz następny podrozdział $\underline{\mathrm{II}}.2$) ta funkcja $\| \ \|$ jest rzeczywiście normą (a sama $\mathcal{B}(X,Y) \underset{lin}{\subset} \mathcal{L}(X,Y)$).
Na razie wykażemy jedynie alternatywne formuły na $\| \ \|$.*)

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O stałej Lipschitza")

Niech $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Wówczas:

1) $\forall_{x \in X} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| = \inf\{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X} \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, a jeśli ponadto $X \neq \{0\}$, to także $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Zbiór $\{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X} \|Ax\| \leq C\|x\|\}$ posiada element najmniejszy.**)

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Jednak $\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$ może NIE posiadać elementu największego!
($\longrightarrow \triangle$).

---

*) Faktycznie ten sam symbol używamy tu jednocześnie w 3 znaczeniach: jako normy z X, normy z Y oraz normy (na razie „normy") zadanej przez (NO). Tak postępujemy dla skrócenia zapisu, ale w razie istotniejszego ryzyka nieporozumienia, będziemy te normy rozróżniać w odpowiedni sposób.

**) Dlatego (patrz też dowód „(vi) ⇒ (v)" Faktu ze str 7) $\|A\|$ jest „najlepszą" (= najmniejszą) stałą Lipschitza funkcji A.

OF - 9

Dowód (Faktu)

Niech $G := \{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X} \|Ax\| \leq C\|x\|\}$.

Ponieważ $\|0\| \leq C \cdot \|0\|$, zatem

$$G = \left\{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C\right\}, \text{ tzn.}$$

G jest po prostu zbiorem nieujemnych ograniczeń górnych zbioru $D := \left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\right\}$. Gdy $X = \{0\}$, to $D = \emptyset$ i $G = [0;+\infty)$ i $0 = \min G$.*) Gdy $X \neq \{0\}$, to $D \neq \emptyset$ i $D \subset [0;+\infty)$, zatem G to zbiór <u>wszystkich</u> ograniczeń górnych D. Jednak ponieważ dla $x \in X \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \quad \text{i} \quad \frac{x}{\|x\|} \in S(0,1) \qquad (1)$$

oraz dla $x \in S(0,1)$ $x = \frac{x}{\|x\|}$, zatem (znów „po prostu"...)

$$D := \{\|Ax\| : x \in S(0,1)\} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Niech więc $X \neq \{0\}$. Ponieważ $A \in B(X,Y)$, D jest niepusty i ograniczony z góry, więc – z aksjomatu Dedekinda – G posiada „min" i z definicji „sup"

$$\sup D = \min G.$$

To na mocy Uwagi 2 (str. OF-5) kończy dowód 2), a z (1) wynika 1).

$\boxed{/\!/}$

---

*) Co dowodzi 2) przy $X = \{0\}$, a 1) jest wówczas oczywiste...

Izomorfizmy

Przypomnijmy, że gdy rozważaliśmy X, Y – „tylko" liniowe, to „izomorfizm liniowy" z X na Y oznaczał po prostu jakikolwiek $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, który jest bijekcją (czyli $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $\operatorname{Ran} A = Y$). Gdy jednak X, Y są unormowane, tak jak wszędzie tu zakładamy, to słowo **izomorfizm** (nawet bez „liniowy") będzie tu zawsze skrótem od **izomorfizm przestrzeni unormowanych (i.p.u.)**

Definicja

A jest **i.p.u.** $(X$ i $Y)^{*)}$ wtw $A \in B(X,Y)$; A jest bijekcją X na Y oraz $A^{-1} \in B(Y,X)$.

W szczególności zatem każda izometria jest izomorfizmem (patrz str. PB-9).

Fakt

Niech $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wówczas NWSR:

(i) A jest izomorfizmem X i Y;

(ii) $A \in B(X,Y)$, $\underset{c \in \mathbb{R}_+}{\exists} \; \underset{x \in X}{\forall} \; \|Ax\| \geq c\|x\|$ i $\operatorname{Ran} A = Y$;

(iii) A jest bijekcją X na Y i w X $\|\ \| \equiv \|\ \|_A$ $^{**)}$.

Dowód $\longrightarrow$ Ćw.

---

*) ew. X na Y itp

**) $\|\ \|_A$ to przeniesienie przez A normy $\|\ \|$ (z Y do X) – patrz str. PB-9.

Warto zauważyć (a propos (iii) powyżej), że gdy A jest izometrią, to w X mamy po prostu: $\| \ \| = \| \ \|_A$.

Uwaga

W tym „pod-pod rozdziale" (1.1.) o żadnej z przestrzeni unormowanych X, Y nie zakładamy, że są one przestrzeniami Banacha. Jak za czas pewien zobaczymy, założenie (dodatkowe) banachowskości pozwoli znacznie uprościć warunki z (ii). Znane twierdzenie, które dotyczy tej kwestii to Twierdzenie „O odwzorowaniu odwrotnym" – jeden z kluczowych wyników Teorii Przestrzeni Banacha.

1.2. Przykłady operatorów liniowych i ich ograniczoności

Zajmiemy się tu licznymi przykładami – zarówno konkretnymi, jak i całymi klasami. Dla większego porządku podzielimy całość na pod-pod-podrozdziały. Tu jednak niewiele wspomnimy o funkcjonałach – nimi zajmiemy się trochę dokładniej w ostatnim podrozdziale (3.).

◆ Skończenie wymiarowa dziedzina ($\dim X < +\infty$)

Operatory zadane macierzą skończoną – to dobrze znane z kursu Algebry Liniowej $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$. Każdy taki operator jest ciągły, gdy rozważamy w $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^l$ normy (metryki) euklidesowe ($\|\ \|_2$), a zatem jest też ciągły przy każdym wyborze norm w tych przestrzeniach (patrz Wniosek i Tw. "O równoważności norm" str. PB-11).

Co więcej, jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy $M_{l\times m}$ – zbiorem wszystkich macierzy skalarnych $l \times m$ (l-wierszy, m-kolumn) a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l) = B(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$, polegająca na „utożsamieniu" operatora z jego macierzą w bazach standardowych:

$$M_{l\times m} \ni A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,m}} \longleftrightarrow A \in B(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1m} \\ \vdots \\ a_{l1}, \dots\ a_{lm} \end{pmatrix}, \quad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \ x \in \mathbb{K}^m, \ i = 1, \dots, l.$$

Jednocześnie, „w drugą stronę":

$$A = \left((Ae_1)^T, \ldots, (Ae_m)^T\right), \quad e_j \in \mathbb{K}^m \ {*)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Często (więc) będziemy „pobłażliwie" utożsamiać $\mathcal{A}$ i A zastępując jedno z nich drugim.

$\dim X < +\infty$

Powyższy przykład można nieco uogólnić.

$\boxed{\text{Fakt}}$

Jeżeli X, Y – przestrzenie unormowane, $\dim X < +\infty$, to $\mathcal{L}(X, Y) = B(X, Y)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$

Niech $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, musimy wykazać, że A – ciągły. Wystarczy zatem wykazać, że $A : X \to \tilde{Y} := \operatorname{Ran} A$ jest ciągły (bo...? – – proszę przypomnieć odpowiedni argument/fakt z topologii $\longrightarrow \Delta$). Ale $\dim \tilde{Y} =: l < +\infty$; niech $m := \dim X$, i niech Φ_X, $\Phi_{\tilde{Y}}$ będą dowolnymi izomorfizmami liniowymi z $\mathbb{K}^m$ na X i z $\mathbb{K}^l$ na $\tilde{Y}$ odpowiednio (np. jak w dowodzie ze str. PB–12). Przenosząc normy z X i $\tilde{Y}$ do $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^l$ odpowiednio przez Φ_X i $\Phi_{\tilde{Y}}$ uzyskamy na mocy powyższego przykładu ciągłość $\tilde{A} := \Phi_{\tilde{Y}}^{-1} \circ A \circ \Phi_X : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$

---

*) Choć oczywiście analogiczne wektory bazy standardowej są też w $\mathbb{K}^l$ ($e_1, \ldots, e_m$ – na ogół oznaczamy je tak samo, choć to innego typu wektory gdy $m \neq l$ ...).

z normami przeniesionymi w $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^l$.

Ale $A = \Phi_{\tilde{Y}} \circ \tilde{A} \circ \Phi_X^{-1}$, więc A jest ciągły, ponieważ oba $\Phi_{\tilde{Y}}$ i Φ_X są izometriami (Fakt „O przenoszeniu normy", str. PB9). $\boxed{\text{K}}$

Uwaga

Jeżeli $\dim X = +\infty$ oraz $Y \neq \{0\}$, to

$$\mathcal{L}(X,Y) \neq B(X,Y).$$

(Tzn. istnieje $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, A - nieciągły).

Dowód $\longrightarrow \triangle$ Wskazówka Wystarczy ($\longrightarrow \triangle$) znaleźć *) nieciągły funkcjonał $\varphi \in X^{\#}$. $\boxed{\text{K}}$

---

*) - aby faktycznie znaleźć — jeszcze jedna Wskazówka: użyć bazy i opisać przy jej użyciu wszystkie $\varphi \in X^{\#}$. Następnie użyć Faktu „O warunkach równoważnych ciągłości" (str. OF-7).

„Kilka" operatorów związanych z pewnymi typowymi konstrukcjami

1. Podprzestrzeń – włożenie

Niech Y – podprzestrzeń (unormowana) przestrzeni unormowanej X. Wówczas włożenie $J_Y : Y \longrightarrow X$ (tzn. $J_Y(y) := y$ dla $y \in Y$) jest operatorem liniowym ciągłym, tzn. $J_Y \in B(Y, X)$.

2. Przestrzenie unormowane z półnormy i półnormowa ograniczoność

Niech $(\tilde{X}, |||\ |||)$ i $(\tilde{Y}, |||\ |||)$ – dwie przestrzenie liniowe z półnormami (oznaczanymi tak samo tylko dla uproszczenia zapisu) i niech $\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0$ oraz $X := \tilde{X}/\tilde{X}_0$, $Y := \tilde{Y}/\tilde{Y}_0$ będą takie jak w definicji normy z półnormy i przez $\|\ \|$ oznaczmy (obie – znów) normy z półnorm $|||\ |||$ w X i Y – odpowiednio.
Niech $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ spełnia dodatkowo

$$\tilde{A}(X_0) \subset Y_0 . \qquad (1)$$

Wówczas, jak wiadomo z Algebry Liniowej (i warto sprawdzić znów teraz $\longrightarrow$ ⚠) wzór

$$A([x]) := [\tilde{A}(x)] \qquad (2)$$

poprawnie definiuje funkcję $A : X \to Y$, a ponadto $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Powiemy, że $\tilde{A}$ jest **półnormowo ograniczony** wtw $\exists_{C \in [0;+\infty)} \forall_{x \in \tilde{X}} \; |||\tilde{A}x||| \leq C|||x|||$,

oraz $\tilde{A}$ **jest półnormowo ograniczony przez C**, dla $C \in [0;+\infty)$, wtw $\forall_{x \in \tilde{X}} \; |||\tilde{A}x||| \leq C|||x|||$.

Niemal oczywisty (→ Ⓜ) jest poniższy wynik.

$\boxed{\text{Fakt}}$ (O operatorze ograniczonym z „półnormowo ograniczonego")

Jeśli $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ spełnia (1) oraz jest półnormowo ograniczony przez $C \in [0;+\infty)$, to $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ oraz

$\|A\| \leq C$ ●

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Jeżeli któraś z półnorm w $\tilde{X}$ lub $\tilde{Y}$ była normą, to odpowiednio X lub Y można izometrycznie utożsamić (z $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$) poprzez $J : \tilde{X} \to X$ ew. $J : \tilde{Y} \to Y$ zadane wzorem $Jv = [v]$ i można wówczas w sposób naturalny utożsamiać A z operatorem ograniczonym z $\tilde{X}$ w Y lub odpowiednio X w $\tilde{Y}$ (ew. $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, gdy na raz mamy dwie normy, choć to mało ciekawe...) ●

3. Przestrzeń ilorazowa, przekształcenie ilorazowe i faktoryzacja

Niech X – przestrzeń unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$, $Y = \overline{Y}$. Niech $\pi : X \longrightarrow X/Y$ będzie przekształceniem ilorazowym, tzn

$$\pi(x) := [x], \quad x \in X.$$

Oczywiście $\pi \in B(X, X/Y)$ (w X/Y przyjmujemy – oczywiście $\| \ \|_i$ jako normę – patrz Tw. „O przestrzeni ilorazowej" str. PB-52).
Co więcej, gdy $Y \neq X$, to $\|\pi\| = 1$ *) – to wynika z w.w. twierdzenia (patrz pkt 3.).
Niech teraz Z – „dodatkowa" przestrzeń liniowa oraz $A \in \mathcal{L}(X, Z)$, przy czym

$$Y \subset \operatorname{Ker}(A). \qquad (3)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X/Y \arrow[ur, "A'"'] & \end{tikzcd}$$

$Y \subset \operatorname{Ker} A \ldots$

Wtedy (i tylko wtedy...), jak wiadomo z Algebry Liniowej istnieje faktoryzacja**) A, tzn. taka $A' : X/Y \longrightarrow Z$, że

$$A = A' \circ \pi.$$

Co więcej A' jest jednoznacznie wyznaczone formułą (poprawną...)

$$A'([x]) = Ax, \quad x \in X \qquad (4)$$

i $A' \in \mathcal{L}(X/Y, Z)$.

---

*) Gdy $Y = X$, to $X/Y = \{0\}$, więc $\|\pi\| = 0$ ...

**) by wyraźniej zaznaczyć, że zależy ona od Y również, mówimy też: „faktoryzacja A dla Y" (a czasem „... dla X/Y").

Gdy Z też jest unormowana i A – ciągły, to otrzymamy jeszcze więcej – dowód $\longrightarrow$ △.

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O faktoryzacji")

Jeśli X, Z – unormowane, $Y = \overline{Y} \underset{lin}{\subset} X$ oraz $A \in B(X,Z)$ i A' jest faktoryzacją A dla Y, to $A' \in B(X/_Y, Z)$ oraz $\|A'\| = \|A\|$.

4. Produkt – rzutowania i włożenia

Rozpatrzmy produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ przestrzeni unormowanych $(X_j, \| \ \|_j)$, $j = 1, \ldots k$ (patrz str PB-48). Niech $j \in \{1, \ldots, k\}$ i niech $I_j : X_j \longrightarrow X$ będzie tzw. j-tym włożeniem tj. przekształceniem danym przez

$$(I_j x)_s = \begin{cases} x & s = j \\ 0 & s \neq j \end{cases}, \quad x \in X_j, \quad s = 1, \ldots, k$$

(tzn. „$I_j x = (0 \ldots, \underset{j}{x}, 0, \ldots 0)$"). Niech też $p_j : X \longrightarrow X_j$ będzie j-tym rzutowaniem (rzutowaniem na X_j), tj.

$$(p_j x) = x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in X.$$

Oczywiście każdy z I_j oraz p_j jest operatorem ciągłym ($\longrightarrow$ △) i łatwo wyliczyć ich normy ($\longrightarrow$ △) przy założeniu, że w X norma została zadana wzorem (1) ze str. PB 48.

Operatory mnożenia (przez funkcję)

Niech Ω – niepusty zbiór. W przestrzeniach funkcyjnych na Ω, a także w przestrzeniach klas funkcji na Ω będziemy często rozważali operatory związane bezpośrednio z operacją mnożenia przez ustaloną funkcję

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{K},$$

które wszystkie będziemy nazywali operatorami mnożenia przez F i oznaczali na ogół symbolem

$$M_F,$$

niezależnie od wyboru konkretnej przestrzeni funkcyjnej/klas funkcji (doprecyzowywać dokładny wybór będziemy na ogół przez dodanie informacji o jaką przestrzeń chodzi). W zależności od wyboru przestrzeni potrzebne będą różne dodatkowe założenia na F, natomiast sama definicja, już przy tych odpowiednich założeniach jest następująca (patrz też str. PB-18 i 19).

(A) Gdy $(X, \|\,\|)$ – taka przestrzeń unormowana, że $X \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$, to $M_F : X \longrightarrow X$ zadana jest formułą

$$M_F f := F \cdot f, \quad f \in X. \qquad (5)$$

Jak widać, definicja ta będzie poprawną definicją przekształcenia z X w X wtw X jest niezmiennicza względem mnożenia przez F.*) Na dodatek, przy tym samym założeniu automatycznie $M_F \in \mathcal{L}(X)$ $(\longrightarrow \triangle)$.

*) Tzn. $\forall_{f \in X}\; F \cdot f \in X$.

(B) Gdy X jest przestrzenią unormowaną klas funkcji uzyskaną za pomocą konstrukcji przestrzeni unormowanej z półnormy lub konstrukcji przestrzeni ilorazowej, tzn. ogólnie: *)

$$X = \tilde{X}/\tilde{X}_0, \quad \text{gdzie} \quad \tilde{X}_0 \underset{lin}{\subset} \tilde{X} \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega),$$

to $M_F : X \longrightarrow X$ zadana jest formułą

$$M_F[f] := [F \cdot f], \qquad \text{dla } f \in \tilde{X} \qquad (5')$$

przy czym będziemy tu żądać dwóch niezmienniczości:

(i) $\tilde{X}$ jest niezmiennicza względem mnożenia przez F

(ii) $\tilde{X}_0$ jest niezmiennicza — " — — " — — " —.

Wówczas również łatwo wykazać, że (5') zadaje poprawnie przekształcenie z X w X i przy tym $M_F \in \mathcal{L}(X)$ $(\longrightarrow \triangle)$

Ponadto tej samej nazwy (oper. mnożenia) i oznaczenia M_F używa się też w różnych przypadkach „mieszanych", tzn. wówczas uzyskamy $M_F \in \mathcal{L}(X, Y)$ dla różnych X, Y zarówno typu z (A), jak i z (B), jednak szczegóły definicji i dodatkowe wymogi dla ich poprawności pozostawiam do ew. przemyślenia słuchaczom (dla różnych możliwych „mieszanych wariantów").

Oto niektóre szczególne przypadki spośród (A) i (B), w których, poza warunkami tam potrzebnymi, podajemy też warunki wystarczające, by $M_F \in B(X)$.

---

*) Jednak wbrew oznaczeniu, $\tilde{X}_0$ to nie koniecznie $\{0\}$, gdy chodzi o zwykłą konstrukcję przestrzeni ilorazowej w $\tilde{X}$-unormowanej, lecz ogólnie – pewna podprzestrzeń domknięta

- M_F w $\ell^\infty(\Omega)$

Niech $F \in \ell^\infty(\Omega)$, wówczas (5) w $X = \ell^\infty(\Omega)$ definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow$ $\triangle$.

- M_F w $C_b(\Omega, \mathcal{T})$ ($\mathcal{T}$ – topologia w Ω)

Niech $F \in C_b(\Omega, \mathcal{T})$, wówczas (5) w $X = C_b(\Omega, \mathcal{T})$ definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow$ $\triangle$.

- M_F w $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}$ – σ ciało „w Ω")

Niech $F \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, wówczas (5) w $X = \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow$ $\triangle$.

- M_a w c i w c_0

Niech $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, wówczas (5) w $X = c_0$ definiuje poprawnie $M_a \in B(X)$ oraz $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

$\longrightarrow$. Podobnie gdy $X = c$, o ile $a \in c$. (również)

- M_F w $\ell^p_w(\Omega)$ (dla $p \in [1; +\infty)$ i $w > 0$)

Gdy $F \in \ell^\infty(\Omega)$, to (5) w $X = \ell^p_w(\Omega)$ definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow$.

- M_F w $L^p(\Omega, \mu)$ (dla $p \in [1; +\infty]$! i miary $\mu \geq 0$ na σ-ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów Ω)

Gdy $F \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ oraz:

– dla $p < +\infty$: $\tilde{X} := \tilde{L}^p$, $\tilde{X}_0 := \tilde{X}_{0,p}$ (patrz str. PB-36)

oraz $X = L^p(\Omega, \mu)$ z normą $\| \ \|_p$ (z półnormy)

– dla $p = +\infty$: $\tilde{X} := \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, $\tilde{X}_0 := Z_\mu$

oraz $X = L^\infty(\Omega, \mu)$ z normą (ilorazową) $\| \ \|_{\infty\, ess}$ (patrz str. PB-58, 59),

to (5') w X definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz

$\|M_F\| \leq \operatorname{supess}|F|.$ *) $\longrightarrow$

*) Przypomnijmy, że jednocześnie $\operatorname{supess}|F| = \|[F]\|_{ess\infty}$, i $[F] \in L^\infty(\Omega, \mu)$, gdzie [ ] jest tu w sensie przestrzeni ilorazowej $\mathcal{M}_b / Z_\mu$ przy wszystkich $p \in [1; +\infty]$ — chodzi bowiem o F, a nie o $f \in \tilde{X}$... (patrz str. PB-60)

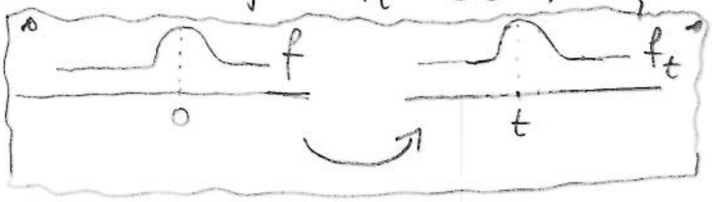
Sytuacja jest tu podobna do tej z M_F w $C_b(\Omega, \mathcal{T})$: przy pewnych dodatkowych założeniach o przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ zachodzi nawet $\|M_F\| = \operatorname{supess}|F|$.

Zadanie ($\rightarrow \triangle$) Sformułować i wykazać możliwie ogólny wynik powyższego rodzaju, samodzielnie definiując odpowiednie (– możliwie słabe ...) założenia odnośnie miary μ.

Operatory przesunięcia

Niech tu Ω będzie jednym ze zbiorów $\mathbb{R}$, $[0;+\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ (można by też rozważać nieco ogólniejsze grupy abelowe lub pewne ich specjalne podzbiory – zachęcam do własnych uogólnień...) Dzięki specjalnej dodatkowej strukturze zbioru Ω, funkcje skalarne określone na Ω można „przesuwać" – w następującym sensie. Dla $f \in \ell(\Omega)$ jej **przesunięcie o t**, gdzie $t \in \Omega$, oznaczamy przez f_t i definiujemy dla przypadku $\Omega = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$ jako $f_t \in \ell(\Omega)$ daną wzorem

$$f_t(s) := f(s-t), \quad s \in \Omega.$$



Gdy natomiast $\Omega = [0;+\infty)$ lub $\mathbb{N}$, to dla $t \in \Omega$ określamy dwa przesunięcia: w prawo i w lewo. **Przesunięcie f o t w prawo** to $f_{+t} \in \ell(\Omega)$ zadane wzorem

$$f_{+t}(s) := \begin{cases} f(s-t) & \text{gdy } s \geq t \\ 0 & \text{gdy } s < t \end{cases}, \quad s \in \Omega,$$

natomiast dla **przesunięcia f o t w lewo** jest nieco „wygodniej" – oznaczamy je f_{-t} i jest to element $\ell(\Omega)$ dany przez

$$f_{-t}(s) := f(s+t), \quad s \in \Omega \quad {}^{*)}$$

Teraz, dla różnych przestrzeni funkcji lub klas funkcji związanych z $\ell(\Omega)$ postępujemy podobnie jak przy operatorach mnożenia w punktach (A) i (B) ze str. OF-20 i 21.

---

*) Zachęcam do zilustrowania przejścia od f do f_{+t} i f_{-t} podobnym rysunkiem (jednak uwaga...) jaki jest powyżej dla f_t.

A więc operator przesunięcia o t będziemy oznaczać przez T_t (zawsze - niezależnie od wyboru przestrzeni), dla $t \in \Omega = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$ i jest to $T_t : X \longrightarrow X$ zadany:

(A) - gdy X przestrzeń funkcji (- patrz (A) str. 20 -), $X \subset_{lin} \ell(\Omega)$ w tym wypadku spełniająca warunek niezmienniczości postaci

$$\forall_{f \in X} \quad f_t \in X,$$

jako:

$$T_t f := f_t \,, \quad f \in X; \qquad (6)$$

(B) - gdy X - przestrzeń klas funkcji (- patrz (B) str. 21 -) tzn. $X = \tilde{X} / \tilde{X}_0$ dla $\tilde{X}_0 \subset_{lin} \tilde{X} \subset_{lin} \ell(\Omega)$ spełniających dwie „niezmienniczości":

$$\forall_{\substack{f \in \tilde{X} \\ g \in \tilde{X}_0}} \quad f_t \in \tilde{X}, \; g_t \in \tilde{X}_0,$$

jako

$$T_t [f] := [f_t] \,, \qquad f \in \tilde{X} \qquad (6')$$

W obu przypadkach (6) i odpowiednio (6') poprawnie zadaje przekształcenie $T_t : X \longrightarrow X$ i co więcej $T_t \in \mathcal{L}(X)$ ($\longrightarrow$ Ćw).

Zupełnie analogicznie postępujemy dla $t \in \Omega = [0;+\infty)$ lub $\mathbb{N}$ i definiujemy operatory oznaczane jako T_{+t} / T_{-t} przesunięcia w prawo/lewo o t, zastępując powyżej wszędzie t przez $+t$ / $-t$ - odpowiednio.

Dla niektórych szczególnych przestrzeni X opiszmy kwestię ograniczoności i normy:

- T_t w $\ell^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ *), $C_b(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$ $(p\in[1;+\infty])$, $t\in\mathbb{R}$

  oraz T_{+t}, T_{-t} w analogicznych przestrzeniach z $[0;+\infty)$ w miejsce $\mathbb{R}$ (i $t\geq 0$ w miejsce $t\in\mathbb{R}$)

  – wszystkie te operatory są ciągłe oraz $\|T_t\| = 1$

  $\longrightarrow \triangle$. Zachodzi też sporo związków algebraicznych –

  – np.:

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \; T_{t+s} = T_t \, T_s \,, \quad T_0 = I$$

$$\forall_{t\geq 0} \; T_{\pm(t+s)} = T_{\pm t} \, T_{\pm s} \,, \quad T_0 = I \,,$$

  ale dla $t>0$ $\quad T_{-t}\,T_{+t} = I \quad$ jednak $\quad T_{+t}\,T_{-t} \neq I$ **)

- T_n w $\ell^p(\mathbb{Z})$ $\quad (p\in[1;+\infty])$, $n\in\mathbb{Z}$

  oraz T_{+n}, T_{-n} w $\ell^p(\mathbb{N})$ $(p\in[1;+\infty])$, c, c_0 (odpowiednio $n\in\mathbb{Z}$ / $n\in\mathbb{N}_0$ ...)

  analogicznie jak „w wersji powyższej" są wszystkie ciągłe i mają normy operatorowe równe 1, ponadto zachodzą analogiczne formuły algebraiczne, jak wyżej.

Warto jeszcze dodać, że T_t we wszystkich powyższych przykładach są ponadto izometriami $\longrightarrow \triangle$, ale $T_{\pm t}$ – NIE.

---

*) Ściślej $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}, \mathfrak{M})$ gdzie typowo $\mathfrak{M}$ to σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, choć mogą też być „równie dobre" same borelowskie.

**) Proszę „wyliczyć" $T_{+t}\,T_{-t}$ jawnie ... $\to \triangle$.

Jak widać w powyższych przykładach nie rozważaliśmy ani przestrzeni „wagowych" $\ell^p_w(\cdot)$ z wagami innymi niż $w \equiv 1$ ani $L^p(\cdot)$ dla miar różnych od miary Lebesgue'a. Nie zawsze bowiem są spełnione odpowiednie niezbędne warunki niezmienniczości, które by umożliwiały zdefiniowanie takich T_t, $T_{\pm t}$.

Zadanie

Znajdź warunki konieczne i dostateczne na $w > 0$ *) gwarantujące, że $T_{\pm n}$ jest poprawnie określony w $\ell^p_w(\mathbb{N})$ w zależności od $p \in [1; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}_1$ oraz $+/-$. Dla spełniających te warunki w zbadaj ciągłość, a w przypadku ciągłości oblicz $\| T_{\pm n} \|$.

$\longrightarrow \triangle$.

---

*) Warto by te warunki były „zgrabnie" zapisane w terminach „samego" w.

Pochodna i całkowanie

Z sensownym zdefiniowaniem „operatora pochodnej" w typowych przestrzeniach, które tu rozważamy jest oczywisty problem — mimo liniowości operacji różniczkowania nie mamy szans rozważać takiego operatora jako określonego „na całym" X, bo dla naszych typowych X jej elementy f ew. $[f]$ nie wszystkie spełniają warunek różniczkowalności f. Ale nawet gdyby X składało się po prostu ze wszystkich funkcji różniczkowalnych, to f' może już tam nie należeć, gdy $f \in X$... Jednym ze sposobów poradzenia sobie z tego typu problemem jest rozważanie operatora pomiędzy różnymi przestrzeniami — np. rozważmy dla $\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R}$ przestrzeń liniową

$X = C^1([a;b])$ z normą $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ *)

oraz $Y = C([a;b])$ (z $\|\cdot\|_\infty$) wówczas

$$D : X \longrightarrow Y \quad \text{zadany wzorem}$$

$$Df = f', \quad f \in X$$

jest operatorem liniowym, co więcej — ciągłym i oczywiście $\|D\| \leq 1$.

Zadanie

Oblicz $\|D\|$. $\longrightarrow$ △

---

*) Proszę sprawdzić, że $(X, \|\ \|)$ jest unormowana, a nawet Banacha $\longrightarrow$ △.

Jednak podejście tego typu bywa często (/niekiedy...?) niewygodne z punktu widzenia różnych zastosowań Analizy Funkcjonalnej w innych działach Analizy. Warto wiedzieć, że w takich sytuacjach bywa pomocne odwołanie się do wspomnianego już tu kiedyś uogólnienia pojęcia operatora z $\mathcal{L}(X)$ – rozważa się wówczas tzw. operatory nieograniczone, które nie muszą mieć całego X jako dziedziny i formułuje się dla nich rozmaite „namiastki" ciągłości.

Znacznie wygodniej jest z całkowaniem (braniem – odpowiednio „zaczepionej" funkcji pierwotnej w mniej lub bardziej dosłownym sensie). Dla każdej z przestrzeni $X = C([a;b])$, $L^p([a;b])$ ($p \in [1;+\infty]$, a,b – j.w.) można zdefiniować tzw. operator Volterry $V : X \longrightarrow X$ wzorem

$$(Vf)(t) := \int_a^t f(s)\,ds \,, \quad t \in [a;b],\ f \in X \tag{7}$$

gdy $X = C([a;b])$, a gdy $X = L^p([a;b])$, to

$$V[f] := [\mathcal{V}f] \quad \text{dla } f \in X, \tag{7'}$$

gdzie $(\mathcal{V}f)(t) := \int_a^t f(s)\,ds$, $t \in [a;b]$, $f \in X$.

$\boxed{\text{Zadanie}}$

Sprawdzić, że w obu przypadkach ((7) i (7')) V jest poprawnie określony i $V \in B(X)$ i obliczyć lub choć oszacować z góry $\|V\|$. *)

---

*) Warto posłużyć się Faktami ze strony OF-17 (dla $L^p, p<+\infty$) oraz ze strony OF-19 (dla L^∞)

Operatory zadane macierzami nieskończonymi

W przypadku macierzy kwadratowych $d \times d$ utożsamialiśmy ją z pewnym operatorem $A \in B(\mathbb{K}^d)$, przy czym w $\mathbb{K}^d = \ell(\{1,\dots,d\})$ mogliśmy rozważać jakąkolwiek normę.

Naturalne jest pytanie, czy coś podobnego jest możliwe dla nieskończonych macierzy kwadratowych. Zajmiemy się tu tylko niejako najprostszym przypadkiem, gdy rozważana macierz będzie co prawda nieskończona, ale w każdym swym wierszu będzie miała jedynie skończoną liczbę wyrazów niezerowych. Doprecyzujmy najpierw jednak, co będziemy tu rozumieli przez macierz kwadratową (ew. „nieskończoną"). Niech $\Omega \neq \emptyset$ będzie pewnym zbiorem – dla nas będzie to „zbiór indeksów" – najczęściej równy $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{N}$, a w przypadku rozważanych uprzednio macierzy $d \times d$ po prostu $\Omega = \{1,\dots,d\}$. Macierzą kwadratową o indeksach z Ω nazwiemy po prostu jakąkolwiek funkcję z $\Omega \times \Omega$ w $\mathbb{K}$. Zgodnie z częstym zwyczajem każdą taką macierz będziemy oznaczać nie tylko „funkcyjnie" $a : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ z wartościami w konkretnym $(s,t) \in \Omega \times \Omega$ jako $a(s,t)$, ale także w formie $a =: (a_{st})_{s,t \in \Omega}$, gdzie $a(s,t) =: a_{st}$.

Wspomniany uprzednio warunek zerowania się tylko skończonej liczby wyrazów w każdym wierszu ma postać:

$$\forall_{s \in \Omega} \quad \# \{t \in \Omega : a_{st} \neq 0\} < +\infty \qquad (Z)$$

Niech więc a będzie macierzą kwadratową spełniającą (2) i oznaczmy dla $s \in \Omega$ odpowiedni zbiór skończony jako Ω_s

$$\Omega_s := \{t \in \Omega : a_{st} \neq 0\}.$$

Założenie (2) umożliwia poprawne zdefiniowanie operatora $\mathcal{A} : \ell(\Omega) \to \ell(\Omega)$, który nazwiemy **operatorem formalnym (wyznaczonym przez a)** wzorem

$$(\mathcal{A}x)(s) := \sum_{t \in \Omega_s} a_{st}\, x(t), \qquad (7)$$

analogicznie jak to ma miejsce dla operatora w $\mathbb{K}^d$ wyznaczonego przez macierz kwadratową $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$. Oczywiście $(\longrightarrow \triangle)$ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\ell(\Omega))$. Można też, dla rozmaitych przestrzeni unormowanych $(X, \|\ \|)$ takich, że $X \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$ sformułować dodatkowe założenia o macierzy a, gwarantujące, że X jest **przestrzenią niezmienniczą dla $\mathcal{A}$**, tzn

$$\forall_{x \in X}\ \mathcal{A}x \in X \qquad (8)$$

oraz, że

$$A := \mathcal{A}|_X \qquad (9)$$

jest ciągły (z X w X), tzn $A \in B(X)$.

Zajmiemy się (na razie?...) tylko dwoma, bardzo szczególnymi przypadkami.

• **Macierz diagonalna** – to sytuacja, gdy macierz $a = \{a_{st}\}_{s,t\in\Omega}$ jest taka, że $\forall_{s\in\Omega}\ \Omega_s = \{s\}$, tzn. $\forall_{s,t\in\Omega}\ (t \neq s \Rightarrow a_{st} = 0)$. Wówczas A zadany w X przez (9) (pod warunkiem (8)) będzie po prostu operatorem mnożenia! Ściślej:

$$A = M_F, \quad \text{gdzie } F(s) = a_{ss} \text{ dla } s \in \Omega.$$

– potrzebne do (8) oraz do tego, by $A \in B(X)$ warunki można zatem w zależności od konkretnego wyboru X i $\| \ \|$ znaleźć wcześniej – gdy rozważaliśmy operatory mnożenia (str OF-22 i 23).

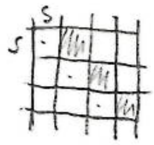
• **Macierz „trójdiagonalna"** – to dotyczy tylko niektórych zbiorów Ω, typu skończony lub nieskończony „przedział" w $\mathbb{Z}$ – np. $\{1,\dots,d\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ itp. Wówczas możemy mówić nie tylko o diagonali złożonej z $a_{s,t}$ dla $(s,t)\in D$, gdzie

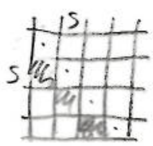
$$D := \{(s,t)\in\Omega\times\Omega : s = t\}$$

D

ale także o **naddiagonali** D_+ i poddiagonali D_-:

$$D_{\underset{(-)}{+}} := \{(s,t)\in\Omega\times\Omega : t = s \underset{(-)}{+} 1\}$$





D_+ D_-

Macierz a nazywamy **„trójdiagonalną"** wtw

$$\forall_{(s,t)\in\Omega\times\Omega\setminus(D\cup D_+\cup D_-)} \quad a_{st} = 0.$$

Inaczej mówiąc, a jest wówczas wyznaczona przez trzy „ciągi":

– **diagonalny** α, $\alpha : \Omega \to \mathbb{K}$, $\alpha(s) = a_{ss}$, $s\in\Omega$

– **naddiagonalny** β, $\beta : \Omega_+ \to \mathbb{K}$, $\beta(s) = a_{s(s+1)}$, $s\in\Omega_+ := \{s\in\Omega : s+1\in\Omega\}$

– **poddiagonalny** γ, $\gamma : \Omega_- \to \mathbb{K}$, $\gamma(s) = a_{s(s-1)}$, $s\in\Omega_- := \{s\in\Omega : s-1\in\Omega\}$.

$\boxed{\text{Zadanie}}$ ($\longrightarrow$ Δ)

Wykaż, że jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ lub $\mathbb{Z}$ oraz X jest jedną z przestrzeni $\ell^p(\Omega)$ $p \in [1; +\infty]$ lub – dla $\mathbb{N}$ – przestrzenią C albo C_0 oraz α, β, γ są ograniczone, to (8) jest spełniony oraz A zadany przez (9) jest ciągły. Oszacuj z góry $\|A\|$ w terminach α, β, γ przy pow. założeniach.

Na koniec tego przykładu dodajmy, że w szczególnym przypadku $X = \ell^2(\mathbb{N})$ lub $\ell^2(\mathbb{Z})$, gdy ponadto:

$$\forall_{s \in \Omega} \ \alpha(s) \in \mathbb{R}, \quad \forall_{s \in \Omega_-} \ \gamma(s) = \overline{\beta(s-1)}$$

(odpowiada to formalnie „samosprzężonej macierzy a", tzn $\forall_{s,t \in \Omega}$ $\overline{a_{st}} = a_{ts}$), to taki operator A nazywany jest **operatorem (bądź „macierzą") Jacobiego** *)

Przy jeszcze jednym założeniu, że γ jest stale równy 1, to A nazywany jest też **dyskretnym operatorem Schrödingera (z „potencjałem" α)**, a gdy jeszcze $\alpha \equiv 0$, to jest to tzw. **swobodny dyskretny operator Schrödingera.**

---

*) Czasem dodatkowo zakłada się, że $\forall_{s \in \Omega_-} \ \gamma(s) \neq 0$.

Transformata Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$

Określmy najpierw przekształcenie $\hat{}: \tilde{L}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ wzorem

$$\hat{f}(t) := c(d) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-its} f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}^d,\ f \in \tilde{L}^1, \qquad (10)$$

gdzie $ts := \sum_{j=1}^{d} t_j s_j$, a $c(d)$ oznacza pewną liczbę dodatnią – najczęściej przyjmowane bywa $c(d) := (2\pi)^{-d/2}$, niektórzy jednak wolą, by $c(d) := 1$ ... – gdy wybór ten będzie istotny, będziemy ustalać odpowiednią wartość. Funkcję $\hat{f}$ nazywa się **transformatą Fouriera f**, a samo $\hat{}$ – **transformatą Fouriera** (tu: „w $\tilde{L}^1$").

Oczywiście funkcja całkowana po prawej stronie (10) jest całkowalna, bo $f \in \tilde{L}^1$ i $|e^{-its}| = 1$, zatem $\hat{f}$ jest przez (10) poprawnie określoną funkcją z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Naszym celem jest zdefiniowanie pewnego operatora określonego na nieco innej przestrzeni – na $L^1(\mathbb{R}^d)$. Będzie on nazywany podobnie – transformata Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zacznijmy od następującego znanego wyniku.

$\boxed{\text{Lemat}}$ („Riemanna – Lebesgue'a")

Jeżeli $f \in \tilde{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f}$ jest ciągła, $\forall_{t \in \mathbb{R}^d}\ |\hat{f}(t)| \leqslant c(d) |||f|||_1$ oraz

$$\lim_{|t| \to +\infty} \hat{f}(t) = 0. \qquad (11)$$

Powyżej $|t| := |t_1| + \ldots + |t_d|$ (choć równie dobrze można by jako $|\cdot|$ wziąć jakąkolwiek normę w $\mathbb{R}^d$).

Dla dowodu lematu potrzebny będzie nam pomocniczy fakt.

Kostką w $\mathbb{R}^d$ nazywamy każdy podzbiór $\mathbb{R}^d$ postaci

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d ,$$

gdzie I_j jest przedziałem skończonej długości dla $j = 1, \ldots, d$. Podobnie **kostka otwarta** (**domknięta**) to taki Q postaci j.w., że każdy z I_j jest przedziałem otwartym (domkniętym) skończonej długości.

Fakt

Dla każdego $f \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1; +\infty)$, oraz $\varepsilon > 0$ istnieje $g \in \mathrm{lin}\{\chi_Q : Q \text{ jest kostką w } \mathbb{R}^d\}$ taki, że
otwartą (domkniętą)

$$|||f - g|||_p < \varepsilon .$$

Dowód (szkic)

To typowy dowód „teoriomiarowy" – najpierw „przybliżamy" (w sensie $|||\ |||_p$) funkcję f funkcją prostą. Następnie funkcje charakterystyczne χ_ω zbiorów mierzalnych $\omega \subset \mathbb{R}^d$ miary skończonej przybliżamy funkcjami charakterystycznymi zbiorów otwartych, a następnie te – kombinacjami liniowymi kostek ... – szczegóły całego dowodu: → $\triangle$. $\boxed{\mathrm{K}}$

Dowód (Lematu Riemanna – Lebesgue'a)

Pierwsza część jest prosta: dla $t \in \mathbb{R}^d$ mamy bowiem

$$|\hat{f}(t)| = c(d)\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-its} f(s)\,ds\right| \leqslant c(d)\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-its} f(s)|\,ds = c(d)\cdot |||f|||_1, \quad (12)$$

a ciągłość funkcji $\hat{f}$ to prosta konsekwencja Tw. Lebesgue'a „O zbieżności majoryzowalnej" ($\longrightarrow \Delta$).

By wykazać (11) dobieramy do $\varepsilon > 0$ oraz $f \in \tilde{L}^1$ funkcję g, będącą liniową kombinacją kostek, z pomocą Faktu poprzedniego, tak, by $|||f-g|||_1 < \varepsilon/2$

Mamy dzięki (12)

$$|\hat{f}(t)| \leqslant |\hat{f}(t) - \hat{g}(t)| + |\hat{g}(t)| \leqslant |\widehat{(f-g)}(t)| + |\hat{g}(t)| \leqslant |||f-g|||_1 + |\hat{g}(t)| <$$

$$< |\hat{g}(t)| + \varepsilon/2 \quad (13)$$

Mamy też $g = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{K}$ i Q_k - pewne kostki oraz $\hat{g} = \sum_{k=1}^{m} c_k \hat{\chi}_{Q_k}$, zatem dzięki (13) jeżeli wykażemy, że dla każdej kostki Q w $\mathbb{R}^d$

$$\lim_{|t| \to +\infty} |\hat{\chi}_Q(t)| = 0, \quad (14)$$

to dowód będzie zakończony. Załóżmy więc, że $Q = I_1 \times \ldots \times I_d$, gdzie I_k – odcinek o końcach $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \leq b_k$.

Mamy

$$\hat{\chi}_Q(t) = c(d)\int_Q e^{-its}\,ds = c(d)\cdot\prod_{k=1}^{d}\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du, \qquad (15)$$

ponadto

$$\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du = \begin{cases} b_j - a_j & \text{gdy } t_j = 0 \\ \frac{i}{t_j}\left[e^{-ib_jt_j} - e^{-ia_jt_j}\right] & \text{gdy } t_j \neq 0 \end{cases},$$

czyli

$$\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du\right| \leqslant \begin{cases} 2C & \text{gdy } t_j = 0 \\ \frac{2}{|t_j|} & \text{gdy } t_j \neq 0 \end{cases}, \qquad (16)$$

gdzie $C := \max_{j=1,..d}(|a_j| + |b_j|) + 1$. Niech więc teraz $\varepsilon > 0$ i niech $M = 1 + \frac{c(d)(2C)^{d-1}\cdot 2d}{\varepsilon}$. Wówczas, jeśli $|t| > M$, to możemy wybrać $j_t \in \{1,\dots,d\}$ $|t_{j_t}| > \frac{M}{d} > 0$,

zatem z (16)

$$\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_{j_t}u}\,du\right| \leqslant \frac{2}{|t_j|} < \frac{2d}{M}$$

Jednak dla $j \neq j_t$ mamy $\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du\right| \leqslant |b_j - a_j| \leq 2C$,

zatem z (15)

$$\left|\hat{\chi}_Q(t)\right| \leqslant c(d)(2C)^{d-1}\cdot\frac{2d}{M} < \varepsilon,$$

co dowodzi (14). $\boxed{\square}$

Rozważmy teraz podzbiór $C_0(\mathbb{R}^d)$ przestrzeni $C_b(\mathbb{R}^d)$:

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ – ciągła i } \lim_{|t| \to +\infty} f(t) = 0 \}$$

– jest to oczywiście podprzestrzeń liniowa, będziemy ją więc traktować jako podprzestrzeń unormowaną $C_b(\mathbb{R}^d)$, ponadto oczywiście $C_0(\mathbb{R}^d)$ jest domknięta w $C_b(\mathbb{R}^d)$, zatem jest przestrzenią Banacha. Ponieważ oczywiście $\wedge$ jest przekształceniem liniowym, zatem w efekcie, na mocy Lematu Riemanna - Lebesgue'a, $\wedge \in \mathcal{L}(\tilde{L}^1(\mathbb{R}^d), C_0(\mathbb{R}^d))$ i $\wedge$ jest półnormowo ograniczony przez $c(d)$ (patrz str. OF-17). Jednocześnie, gdy $f \in \tilde{X}_{0,1}$ (patrz str. PB-36 i 37), to $f = 0$ prawie wszędzie na $\mathbb{R}^d$, zatem $\hat{f}(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^d$. To pozwala nam na mocy konstrukcji ze stron OF-16 i 17 zdefiniować przekształcenie liniowe z $L^1(\mathbb{R}^d) = \tilde{L}^1(\mathbb{R}^d) / \tilde{X}_{0,1}$:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathcal{F}([f]) = \hat{f}, \quad f \in \tilde{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Nazywamy je transformatą Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dzięki Faktowi „O oper. ograniczonym z półnormowo ograniczonego" (str. OF-17) mamy:

Fakt

$\mathcal{F} \in B(L^1(\mathbb{R}^d), C_0(\mathbb{R}^d))$ oraz $\|\mathcal{F}\| \leq c(d)$. $\boxed{\text{ц}}$

1.3. Rozszerzanie operatorów ciągłych na domknięcie

Niech X będzie przestrzenią unormowaną oraz Y - jej liniową podprzestrzenią, gęstą w X. Nie każda funkcja ciągła określona na Y daje się rozszerzyć do funkcji ciągłej na całym X. Jednak, gdy funkcja ta jest operatorem liniowym - sytuacja jest znacznie lepsza ...

Twierdzenie („O rozszerzaniu operatorów ograniczonych")

Jeśli $Y \underset{lin}{\subset} X$, $\overline{Y} = X$ oraz $A \in B(Y, Z)$ i Z-p. Banacha, to istnieje dokładnie jeden $\tilde{A} \in B(X, Z)$, taki że

$\tilde{A}|_Y = A$. Co więcej, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ dla tego jedynego $\tilde{A}$.

Dowód

Jednoznaczność jest oczywista, wynika z gęstości Y i żądania ciągłości $\tilde{A}$ (liniowość, ani zupełność Z nie są tu potrzebne). Istnienie wykażemy konstruując odpowiednie $\tilde{A}$. Niech $x \in X$, wówczas istnieje pewien $\{x_n\}$ o wyrazach w Y taki, że $x_n \to x$. Ciąg $\{x_n\}$ jest zatem c. Cauchy'ego, więc z ograniczoności A

$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\|$, zatem $\{Ax_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w Z, więc $Ax_n \to z$ dla pewnego $z \in Z$ dzięki zupełności Z. Wykażemy, że tak uzyskany $z \in Z$ nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x. Przypuśćmy bowiem, że również $x_n' \longrightarrow x$ oraz $Ax_n' \longrightarrow z'$. Wówczas $x_n - x_n' \longrightarrow 0$, więc z ciągłości A $A(x_n - x_n') \longrightarrow 0$. Jednocześnie jednak $A(x_n - x_n') = Ax_n - Ax_n' \longrightarrow z - z'$ – stąd $z - z' = 0$, czyli $z = z'$. Dzięki tej niezależności możemy zdefiniować $\tilde{A}(x) := z$, gdzie z skonstruowany j.w. Tym sposobem określiliśmy pewną funkcję $\tilde{A} : X \longrightarrow Z$, która ponadto spełnia:

jeśli $\{y_n\}$ ciąg w Y zbieżny do $x \in X$, to $Ay_n \longrightarrow \tilde{A}(x)$. *)

Stąd bez trudu można uzyskać zarówno liniowość $\tilde{A}$ ($\longrightarrow$ ⚠), jak i fakt, że $\tilde{A}_{|Y} = A$ (wystarczy rozważać ciąg stały, równy $x \in Y$...).

Niech teraz $x \in X$ oraz niech $\{y_n\}$ ciąg z Y, zbieżny do x, mamy zatem:

$$\|\tilde{A}x\| = \|\lim_n Ay_n\| = \lim_n \|Ay_n\|, \text{ więc}$$

$$\|\tilde{A}x\| \xleftarrow[n]{} \|Ay_n\| \leq \|A\|\|y_n\| \xrightarrow[n]{} \|A\|\|x\|, \text{ czyli } \|\tilde{A}x\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Stąd $\tilde{A} \in B(X, Z)$ i $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$, z drugiej strony

$$\|\tilde{A}\| = \sup\{\|\tilde{A}x\| : x \in \overline{K}_X(0,1)\} \geqslant \sup\{\|\tilde{A}x\| : x \in \overline{K}_Y(0,1)\} =$$

$$= \|\tilde{A}_{|Y}\| = \|A\|, \text{ czyli } \|\tilde{A}\| = \|A\|.$$

▯

---

*) Na tym etapie wystarczała jednostajna ciągłość A, bez liniowości można się było obejść...

Przy tej okazji warto wspomnieć też o nieco zbliżonym twierdzeniu, dotyczącym rozszerzania nie operatorów, lecz przestrzeni unormowanych — do przestrzeni Banacha.

Definicja

Przestrzeń Banacha $\tilde{X}$ jest uzupełnieniem przestrzeni unormowanej X wtw istnieje $Y \underset{lin}{\subset} \tilde{X}$ taka, że $\overline{Y} = \tilde{X}$ oraz X i Y są izometryczne.

Uwaga

Nietrudno wykazać, że jeśli X posiada uzupełnienie, to istnieje także takie uzupełnienie $\tilde{X}$ przestrzeni X, że X jest po prostu podprzestrzenią unormowaną $\tilde{X}$. ($\longrightarrow \triangle$).

Okazuje się, że każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić — nawet jest lepiej...

Twierdzenie („O uzupełnianiu")

Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną, to istnieje uzupełnienie X, co więcej, wszystkie uzupełnienia przestrzeni X są izometryczne.

Co jeszcze więcej, jeżeli dla $j = 1,2$ $\tilde{X}_j$ jest uzupełnieniem X, $\overline{Y_j} = \tilde{X}_j$ oraz $I_j : X \to Y_j$ jest izometrią, to istnieje dokładnie $J \in B(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ taki, że

$$J|_{Y_1} = I_2 I_1^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "J"] & & \tilde{X}_2 \\
\cup & & \cup \\
Y_1 \arrow[rr] & & Y_2 \\
& X \arrow[ul, "I_1"] \arrow[ur, "I_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Powyższy J jest izometrią (na $\tilde{X}_2$).

$\boxed{\text{Dowód}}$ (szkic)

Samą kwestię istnienia uzupełnienia można wykazać na różne sposoby. Jeden z nich to klasyczna konstrukcja oparta na idei Cantora:
w zbiorze wszystkich ciągów Cauchy'ego $\{x_n\}_{n\geq 1}$ w X wprowadzamy relację $\equiv$:

$$\{x_n\}_{n\geq 1} \equiv \{x_n'\}_{n\geq 1} \quad \text{wtw} \quad x_n - x_n' \longrightarrow 0 .$$

Łatwo sprawdzić, że to relacja równoważności i $\widetilde{X}$ definiujemy jako zbiór wszystkich klas abstrakcji tej relacji. Nietrudno odgadnąć, jak wprowadzamy w $\widetilde{X}$ strukturę przestrzeni unormowanej, jak wybrać odpowiednią podprzestrzeń Y, jak wykazać, że $\overline{Y} = \widetilde{X}$ oraz że $\widetilde{X}$ – Banacha. Choć nietrudne – to żmudne... My poznamy inną – „zgrabniejszą" konstrukcję w jednym z następnych rozdziałów.
Drugą część twierdzenia – „Co jeszcze więcej..." łatwo wykazać w oparciu o poprzednie twierdzenie „O rozszerzaniu operatorów ograniczonych" $\longrightarrow$ △. $\square$

2 Przestrzenie $B(X,Y)$ i „dodatkowe" zbieżności

W poprzednim podrozdziale oznaczyliśmy przez $B(X,Y)$ zbiór wszystkich ograniczonych $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ dla unormowanych przestrzeni X i Y. Co więcej – okazało się, że ograniczoność oznacza w tym wypadku dokładnie to samo, co ciągłość. Zdefiniowaliśmy też $\| \, \|$ dla elementów $B(X,Y)$, ale wciąż nie sprawdziliśmy, że rzeczywiście jest to norma …

2.1 Przestrzeń unormowana $B(X,Y)$

Niech X i Y – przestrzenie unormowane (nad $\mathbb{K}$).
Zacznijmy od rezultatu, który wyjaśnia m. in kwestię normy.

$\boxed{\text{Fakt}}$

$B(X,Y) \underset{lin}{\subseteq} \mathcal{L}(X,Y)$, a $\| \, \|$ jest normą w $B(X,Y)$.
Ponadto, jeżeli Z – także przestrzeń unormowana, to dla $A \in B(X,Y)$, $B \in B(Y,Z)$ zachodzi $BA \in B(X,Z)$ oraz

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|.$$

W szczególności $B(X)$ jest algebrą unormowaną (nad $\mathbb{K}$) z jedynką $*)$, gdy $X \neq \{0\}$ i jako mnożenie weźmiemy mnożenie (składanie) operatorów i za jedynkę I.

$*)$ Tzn. jest algebrą z jedynką i jednocześnie przestrzenią unormowaną oraz zachodzi: $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, $\|\mathbb{1}\| = 1$ – patrz $*)$ ze str. OF-3.

Dowód

To, że $B(X,Y)$ jest podprzestrzenią liniową jest oczywiste, dzięki temu, że ograniczoność i ciągłość są w $\mathcal{L}(X,Y)$ tym samym oraz, że dodawanie i mnożenie przez liczby są operacjami ciągłymi (albo „po prostu": $x_n \to x \Rightarrow (Ax_n \to Ax,\ Bx_n \to Bx) \Rightarrow (A+B)x_n = Ax_n + Bx_n \to x+y$, gdy $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ itd...).

Mamy:

(i) gdy $\|A\|=0$, to $\forall_{x\in X} \|Ax\| \leq 0$, więc $\forall_{x\in X} Ax = 0$,

tzn. $A=0$;

(ii) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|\lambda(Ax)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \cdot \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$;

(iii) $\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(A+B)x\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq$

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

To dowodzi, że $\| \ \|$ jest normą w $B(X,Y)$. Gdy $A \in B(X,Y)$, $B \in B(Y,Z)$, to oczywiście $BA = B\circ A \in B(X,Z)$ jako złożenie funkcji ciągłych, ponadto dla każdego $x \in X$

$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \|x\|$,

więc $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ na mocy Faktu „Ostatni Lipschitza" p.2) (str. OF-9). Oczywiście w przypadku $B(X)$ mamy

$\|I\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|x\| = 1$, gdy $X \neq \{0\}$. ∎

Gdy wiemy już, że $B(X,Y)$ to przestrzeń unormowana, warto zastanowić się nad jej banachowskością.

Twierdzenie („O zupełności $B(X,Y)$")

Jeśli Y jest p. Banacha, to $B(X,Y)$ także.

Dowód *)

Niech $\{A_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X,Y)$.

Dla każdego $x \in X$ mamy:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|,$$

zatem ciąg $\{A_n x\}_{n\geq 1}$ jest Cauchy'ego w Y, jest więc zbieżny, dzięki zupełności Y. Zdefiniujmy zatem funkcję $A: X \longrightarrow Y$ wzorem:

$$A(x) := \lim_{n\to+\infty} A_n x \qquad (1)$$

(– inaczej mówiąc: A to granica punktowa ciągu funkcji $\{A_n\}_{n\geq 1}$).

Nietrudno wykazać dzięki (1), że $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ($\longrightarrow$).

Co więcej, dla każdego $m \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$ dzięki (1) mamy

$A_n x - A_m x \xrightarrow[n]{} Ax - A_m x$, zatem (z ciągłości $\| \ \|$ w Y)

---

*) Jak widać poniżej, jest on bardzo podobny do dowodu zupełności $\ell^\infty(\Omega)$ – nic dziwnego: $\|A\| = \sup_{x \in \overline{K}(0,1)} \|A(x)\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in \overline{K}(0;1)\}$, podobnie jak dla $f \in \ell^\infty(\Omega)$ $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

$$\|A_n x - A_m x\| \xrightarrow[n]{} \|Ax - A_m x\|. \qquad (2)$$

Niech $\varepsilon > 0$, i niech $N \geq 1$ będzie takie, że

$$\forall_{n,m \geq N} \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon/2.$$

Zatem gdy $m \geq N$, to dla dost. dużych n mamy

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \leqslant \varepsilon/2 \, \|x\|,$$

więc dzięki (2) także $\|Ax - A_m x\| \leq \varepsilon/2 \cdot \|x\|$,

czyli $\|(A - A_m)x\| \leq \varepsilon/2 \|x\|$.

Zauważmy tu, że N było dobrane niezależnie od wyboru x, i wykazaliśmy, że

$$\forall_{m \geq N} \; \forall_{x \in X} \quad \|(A - A_m)x\| \leq \varepsilon/2 \|x\|,$$

tzn.

$$\forall_{m \geq N} \quad A - A_m \in B(X,Y) \text{ oraz } \|A - A_m\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Czyli $A \in B(X,Y)$ (bo w szczególności $A = (A - A_N) + A_N \in B(X,Y)$)

oraz $A_n \longrightarrow A$ w $B(X,Y)$. $\boxed{\lightning}$

$\boxed{\text{Uwaga 1}}$

W powyższym dowodzie w istotny sposób skorzystaliśmy z tego, że Y była zupełna. Czy jest to jednak także warunek konieczny dla zupełności $B(X,Y)$?
— np. gdy $X=\{0\}$, to $B(X,Y)$ jest zupełna, niezależnie od wyboru Y ... (bo $\longrightarrow \triangle$).

$\boxed{\text{Pytanie}}$

Czy jeśli $X \neq \{0\}$, to z zupełności $B(X,Y)$ wynika zupełność Y ??? $\longrightarrow$ ewent. $\triangle$ ...

$\boxed{\text{Uwaga 2}}$

Jednak nie potrzebowaliśmy wcale zupełności X !
To się wiąże ściśle z dwoma niedawno pokazanymi twierdzeniami: „O rozszerzaniu operatorów ograniczonych" i „O uzupełnianiu".
W oparciu o nie nietrudno wykazać, że gdy Y - Banacha, to przestrzenie $B(X,Y)$ oraz $B(\tilde{X},Y)$, gdzie $\tilde{X}$ - uzupełnienie X, są izometryczne ! $\longrightarrow \triangle$.

Definicja

Przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej X nazywamy przestrzeń unormowaną $B(X, \mathbb{K})$; oznaczamy ją symbolem

$$X^*.$$

W szczególności zatem $X^* \underset{\text{lin}}{\subset} X^{\#}$, jednak $X^{\#}$ nie miało żadnej struktury przestrzeni unormowanej (poza przypadkami, gdy $X^* = X^{\#}$, tzn. gdy $\dim X < +\infty$ – patrz Uwaga ze str OF-15).

Jako natychmiastową konsekwencję Twierdzenia „O zupełności $B(X,Y)$" otrzymujemy

Wniosek

X^* jest przestrzenią Banacha, niezależnie od zupełności przestrzeni unormowanej X.

Więcej na temat przestrzeni X^* będziemy mówili jeszcze kilkakrotnie, szczególnie w Rozdziale $\underline{\text{IV}}$, a nieco podstawowych faktów ogólnych pojawi się już wkrótce – w podrozdziale $\underline{\text{II}}.3$.

Warto sobie jednak jeszcze w tym miejscu uświadomić, że na razie dla wielu przestrzeni nieskończonego wymiaru nie wiemy nawet podstawowej rzeczy – mianowicie, czy $X^* \neq \{0\}$ ... Tzn. czy istnieje jakikolwiek ciągły funkcjonał liniowy poza zerowym (który sam z pewnością ciągły jest...). Więcej na ten temat dowiemy się dopiero w Rozdziale $\underline{\text{IV}}$, przynajmniej w odniesieniu do dowolnych przestrzeni unormowanych X.

2.2. Dodatkowe zbieżności

Przy użyciu zdefiniowanej przed chwilą przestrzeni sprzężonej, w każdej przestrzeni unormowanej można zdefiniować tzw. słabą topologię – na ogół słabą*) niż zwykła topologia normowa. Tą sprawą zajmiemy się jeszcze nieco później, jednak na razie powiemy tylko o tzw. słabej zbieżności w X (która – jak można będzie w przyszłości sprawdzić, będzie po prostu zbieżnością w sensie tej właśnie słabej topologii). Jeszcze ważniejsze będą tu dla nas pewne dwa nowe rodzaje zbieżności w $B(X,Y)$.

Słaba zbieżność w X

Definicja $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ – ciąg wektorów z przestrzeni unormowanej X jest słabo zbieżny do $g\in X$ wtw

$$\forall_{\varphi\in X^*}\quad \varphi(x_n)\longrightarrow\varphi(g).$$

Samo „słabo zbieżny" oznacza po prostu, że istnieje $g\in X$, do którego $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ jest słabo zbieżny. Powyższe $g\in X$ nazywa się słabą granicą**).

Będziemy używali symboli $w\text{-}\lim\limits_{n\to+\infty}$**), $\xrightarrow[w]{}$, $\xrightarrow[w]{n}$, $\xrightarrow[n]{w}$ itp dla słabej granicy (w od ang. weak) i odpowiednio – słabej zbieżności.

---

*) tj. – mającą mniej zbiorów otwartych.

**) W przyszłości będziemy mogli wykazać, że słaba granica jest jednoznacznie przez ciąg wyznaczona – dopiero wtedy będzie sens używać symbolu $w\text{-}\lim$...

Fakt

$$x_n \to g \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow[w]{} g.$$

Dowód $\forall_{\varphi \in X^*} \ |\varphi(x_n) - \varphi(g)| = |\varphi(x_n - g)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_n - g\| \to 0.$ ■

W przeciwną stronę ogólnie implikacji brak, ale jemnie zbyt umiemie na odpowiednie przykłady. Warto natomiast wspomnieć, że czasem dla odróżnienia wyraźniej zbieżności „zwykłej" w X od słabej nazywa się tę pierwszą **zbieżnością normową** (ew. „**w normie**").

Normowa, silna i słaba zbieżność w $B(X,Y)$

Podobnie jak w ogólnej sytuacji opisanej wyżej na zbieżność w przestrzeni unormowanej $B(X,Y)$ mówi się często normowa zbieżność, choćby po to by odróżnić ją od innych rodzajów zbieżności używanych dla tego typu przestrzeni. A dość popularne są jemnie dwie inne, które a priori można definiować nawet w $\mathcal{L}(X,Y)$

Definicja

Niech $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ – ciąg operatorów z $\mathcal{L}(X,Y)$ oraz $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(S) $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ jest **silnie zbieżny do A** wtw *)

$$\forall_{x \in X} \quad A_n x \to Ax$$

---

*) Zatem to po prostu zbieżność punktowa operatorów.

(W) $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ jest słabo zbieżny do A *) wtw

$$\forall_{\substack{\varphi \in Y^*, \\ x \in X}} \quad \varphi(A_n x) \longrightarrow \varphi(Ax) \,.\ **)$$

Symbole używane dla granic i zbieżności w tych dwóch sensach to odpowiednio $s-\lim_{n\to+\infty}$, $\xrightarrow[s]{}$, $\xrightarrow[s]{n}$, $\xrightarrow[n]{s}$, itp dla (S)

oraz $w-\lim_{n\to+\infty}$, $\xrightarrow[w]{}$, $\xrightarrow[w]{n}$, $\xrightarrow[n]{w}$, itp dla (W) *).

Tu podobnie jak poprzednio użycie w oznaczeniach liter „S" i „W" pochodzi z angielskiego („strong", „weak"), a nie z języka polskiego (silny, słaby)

...

Uwaga 1 + **Umowa**

Niestety pojawia się tu konflikt terminologii i oznaczeń: „Słaba zbieżność" może oznaczać bowiem zarówno to, co zdefiniowali-śmy przed chwilą w (W) jak i zbieżność zdefiniowaną na stronie OF-50 w odniesieniu do przestrzeni unormowanej $B(X,Y)$ – tzn.:

$(\tilde{W})$ $\forall_{\varphi \in (B(X,Y))^*} \quad \varphi(A_n) \longrightarrow \varphi(A)$

o ile tylko $A_n, A \in B(X,Y)$! Niestety warunek $(\tilde{W})$ i ten z (W) nie muszą być w takiej sytuacji równoważne.

By więc uniknąć tej dwuznaczności stosujemy umowę, że

**) Tzn. $\forall_{x \in X} \quad Ax_n \xrightarrow[w]{} Ax$, gdzie $\xrightarrow[w]{}$ oznacza tu słabą zbieżność w Y.

*) Ale patrz – Uwaga 1 poniżej ! Ponadto „ostrzeżenie" z **) ze strony poprzedniej w odniesieniu do obu s-lim i w-lim także jest potrzebne.

zawsze, gdy w kontekście ciągu operatorów mówimy o słabej zbieżności bez dodatkowych wyjaśnień, to chodzi o zbieżność w sensie (W).

Uwaga 2

Choć zbieżność silną i słabą ciągu operatorów zdefiniowaliśmy ogólnie dla operatorów liniowych, to odgrywają one istotną ~~rolę~~ rolę raczej wtedy, gdy dodatkowo założymy, że $A_n, A \in B(X,Y)$. Jednak, jak zobaczymy w przyszłości (w Rozdziale $\underline{V}$) przy dodatkowych założeniach, że X, Y – Banacha dla obu tych zbieżności fakt, że granica A jest operatorem ciągłym będzie wynikać z samej ciągłości operatorów A_n !

Na koniec tego podrozdziału sformułujmy fakt analogiczny do tego ze str. OF-51. Jego dowód (⟶ Ćw.) jest niemal oczywisty...

Fakt

(i) Jeśli $\forall_{n \geq n_0}$ $A_n \in B(X,Y)$ oraz $A \in B(X,Y)$ i $A_n \longrightarrow A$, to $A_n \xrightarrow[s]{} A$;

(ii) $A_n \xrightarrow[s]{} A \implies A_n \xrightarrow[w]{} A$.

3. Funkcjonały liniowe i ograniczoność

Zajmiemy się tu szczególnymi operatorami liniowymi – w jakimś sensie najprostszymi, bo o wartościach w „najprostszej" metrycznej przestrzeni (liniowej) unormowanej, tzn. w $\mathbb{K}$.

3.1 Struktura funkcjonału liniowego

Zaczniemy od problemu „samej" liniowości funkcjonału. Tzn. badamy tu wszystkie $\varphi \in X^{\#}$ dla pewnej X – liniowej.

Przypomnimy dwa pojęcia (+ oznaczenia). Jeżeli $X_1, X_2, Y \underset{lin}{\subseteq} X$ to mówimy, że **Y jest sumą prostą X_1 i X_2**, co oznaczamy symbolem

$$Y = X_1 \oplus X_2$$

wtw $X_1 + X_2 = Y$ *) oraz $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Natomiast **kowymiarem Y w X** nazywamy $\dim(X/Y)$ i oznaczamy go $\operatorname{codim}(Y)$, ewent. $\operatorname{codim}_X(Y)$.

$\boxed{\text{Fakt}}$

Jeśli $X_1, X_2, Y \underset{lin}{\subset} X$ to NWSR:

(i) $Y = X_1 \oplus X_2$ (ii) $\forall_{y \in Y} \ \exists!_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2} \ y = x_1 + x_2$.

---

*) Przypomnimy, że dla $P, Q \subset X$ $P + Q := \{p + q : p \in P, q \in Q\}$.

Dowód → kurs Algebry Liniowej... (ew. → $\triangle$). $\square$

Gdy rozważamy $\varphi \in X^*$ to duża część informacji o φ zawarta jest w jego jądrze – $\operatorname{Ker}\varphi$. Oczywiście $\varphi = 0$ wtw $\operatorname{Ker}\varphi = X$. Poniżej zajmiemy się więc $\varphi \neq 0$.

Fakt („O jądrze funkcjonału")

Załóżmy, że $\varphi \in X^\# \setminus \{0\}$, wówczas:

1. $\operatorname{codim} \operatorname{Ker}\varphi = 1$;
2. $\forall_{x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker}\varphi}$

   (a) $X = \operatorname{lin}\{x_0\} \oplus \operatorname{Ker}\varphi$,

   (b) $\forall_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ y \in \operatorname{Ker}\varphi}} \quad \varphi(\lambda x_0 + y) = \lambda \varphi(x_0)$.

Dowód

Rozważmy przestrzeń ilorazową (liniową „tylko") $X/\operatorname{Ker}\varphi$ – istnieje dla niej faktoryzacja $\tilde{\varphi} \in \left(X/\operatorname{Ker}\varphi\right)^\#$ spełniająca

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\ X/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$, która z definicji ma zerowe jądro. Ponadto $\operatorname{Ran}\tilde{\varphi} = \mathbb{K}$, bo $\varphi \neq 0$ (czyli $\operatorname{Ran}\tilde{\varphi} = \operatorname{Ran}\varphi = \mathbb{K}$), zatem $\tilde{\varphi}$ jest izomorfizmem liniowym $X/\operatorname{Ker}\varphi$ na $\mathbb{K}$. W szczególności $1 = \dim\mathbb{K} = \dim\left(X/\operatorname{Ker}\varphi\right)$, co daje 1.

By wykazać 2., rozważmy $x_0 \in X \setminus \mathrm{Ker}\,\varphi$, tzn. $\varphi(x_0) \neq 0$, czyli biorąc dla $x \in X$ $\lambda_x \in \mathbb{K}$ zadane jako $\lambda_x := \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ otrzymujemy $\varphi(x) = \lambda_x \cdot \varphi(x_0) = \varphi(\lambda_x x_0)$, czyli $\varphi(x - \lambda_x x_0) = 0$, co oznacza, że $x - \lambda_x x_0 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, czyli $x \in \lambda_x x_0 + \mathrm{Ker}\,\varphi$. Stąd $X = \mathrm{lin}\{x_0\} + \mathrm{Ker}\,\varphi$, ale $\mathrm{lin}\{x_0\} \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, bo gdy $\lambda x_0 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, to $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \varphi(x_0) = 0$, więc $\lambda = 0$. Stąd 2(a), a 2(b) jest oczywiste z liniowości φ. $\boxed{\text{\L}}$

$\boxed{\text{Wniosek}}$

Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in X^{\#}$, to $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$ wtw $\exists_{c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}}\ \varphi_1 = c\varphi_2$.

$\boxed{\text{Dowód}}$

To wynika natychmiast z pow. Faktu punkt 2. (a) i (b) (oraz z postaci $\mathrm{Ker}\,\varphi$ dla $\varphi = 0$). $\boxed{\text{\L}}$

$\boxed{\text{Uwaga}}$ Jeżeli $Y \underset{\text{lin}}{\subset} X$ oraz $x_0 \in X \setminus Y$ spełnia $\mathrm{lin}\{x_0\} \oplus Y = X$ i $c_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ oraz funkcja $\varphi : X \to \mathbb{K}$ zadana jest wzorem $\varphi(\lambda x_0 + y) := \lambda c_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, to $\varphi \in X^{\#}$ i $\mathrm{Ker}\,\varphi = Y$.

$\boxed{\text{Dowód}} \longrightarrow \triangle$.

Gdy X będzie przestrzenią unormowaną, to Fakt „O jądrze funkcjonału" oraz powyższa Uwaga pozwolą nam zrozumieć strukturę każdego funkcjonału z X^{*}.

3.2 Ciągłość funkcjonału liniowego

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Okazuje się, że poza kilkoma warunkami równoważnymi ciągłości funkcjonału liniowego na X, które zapisane były w Fakcie „O warunkach równoważnych ciągłości" (str. OF-7) można sformułować jeszcze jeden, który jest specyficzny dla funkcjonałów i nie przenosi się na wszystkie operatory liniowe.

Twierdzenie („O ciągłości funkcjonału")

Jeżeli X – unormowana oraz $\varphi \in X^{\#}$, to

$$\varphi \in X^{*} \quad \text{wtw} \quad \operatorname{Ker}\varphi \text{ jest domknięte.}$$

Dowód

„$\Longrightarrow$" jest jasne, bo $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$.

„$\Longleftarrow$" Załóżmy, że $\operatorname{Ker}\varphi$ jest domknięte. Gdy $\varphi = 0$, to oczywiście φ – ciągłe. Załóżmy więc, że $\varphi \neq 0$ i rozważmy faktoryzację $\tilde{\varphi}$ funkcjonału φ, która na mocy Faktu „O jądrze funkcjonału" (str. OF-55)) jest operatorem liniowym z przestrzeni liniowej $X/\operatorname{Ker}\varphi$ w $\mathbb{K}$, przy czym $\dim X/\operatorname{Ker}\varphi = 1$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\ X/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Gdy traktujemy $\mathbb{K}$ i $X/\operatorname{Ker}\varphi$ jako przestrzenie unormowane, to dzięki ciągłości operatorów na przestrzeni skończonego wymiaru (patrz. Fakt str. OF-14) mamy $\tilde{\varphi}$ – ciągłe. Ale $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ oraz π – ciągłe na mocy Tw. „O przestrzeni ilorazowej" (PB – 52), więc także $\varphi \in X^*$. $\boxed{\text{M}}$

$\boxed{\text{Zadanie}}$ → M

Znaleźć przykład takich X, Y – unormowanych oraz $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, że A – nieciągły oraz $\operatorname{Ker} A$ – domknięte.

3.3. Przykłady funkcjonałów ciągłych

Zobaczymy tu wiele przykładów funkcjonałów ciągłych (liniowych) w różnych przestrzeniach X. W rozdziale $\underline{\text{IV}}$ wykażemy m.in., że dla niektórych X, spośród podanych tu całych klas $\mathcal{K}$ funkcjonałów z X^* (tzn $\mathcal{K} \subset X^*$) de facto zachodzi $\mathcal{K} = X^*$, tzn każdy funkcjonał z X^* jest postaci pewnego elementu klasy $\mathcal{K}$.

♦ Dla $\dim X < +\infty$

Wówczas, jak wiemy z Faktu ze strony OF – 14, zachodzi $X^* = X^\#$. A zatem gdy $v_1, \dots, v_d$ – baza w X, to każdy $\varphi \in X^*$

jest jednoznacznie wyznaczony przez $y \in \ell(\{1,\dots,d\})$ taki, że
$\varphi = \varphi_y$, gdzie

$$\varphi_y(x) := \sum_{j=1}^{d} y_i x_i, \quad \text{dla} \qquad x = \sum_{j=1}^{d} x_j v_j \qquad (1)$$

a przy tym dla każdego $y \in \ell(\{1,\dots,d\})$ wzór (1) wyznacza $\varphi_y \in X^*$.

◆ W $L^p(\Omega,\mu)$ dla $p \in [1;+\infty]$, $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ – przestrzeń miarowa

Oznaczmy przez p^* taki element $[1;+\infty]$, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, tzn. ściślej

$$p^* := \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} & \text{dla } p \in (1;+\infty) \\ +\infty & \text{dla } p = 1 \\ 1 & \text{dla } p = +\infty \end{cases} \qquad (2)$$

Niech $q = p^*$ i dla każdego $g \in \begin{cases} \tilde{L}^q(\Omega,\mu) & \text{gdy } p \neq 1 \ (q \neq +\infty) \\ \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) & \text{gdy } p = 1 \ (q = +\infty) \end{cases}$

$\varphi_g : L^p(\Omega,\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$ zadajemy wzorem

$$\varphi_g([f]) := \int_\Omega f g \, d\mu, \qquad f \in \begin{cases} \tilde{L}^p(\Omega,\mu) & \text{gdy } p \neq +\infty \\ \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) & \text{gdy } p = +\infty \end{cases} \qquad (3)$$

(a) $p \in (1;+\infty)$

Na mocy nierówności Höldera, gdy $p \in (1;+\infty)$, otrzymujemy

$$\varphi_g \in \left(L^p(\Omega,\mu)\right)^*, \quad \|\varphi_g\| \leq |||g|||_q = \|[g]\|_q,$$

przy czym „po drodze" korzystamy tu z Faktu ze strony OF-17 (o operatorze ograniczonym z półnormowo ogr.). Co więcej z (3) jest jasne, że jeżeli $g_1, g_2 \in \tilde{L}^q$ oraz $[g_1] = [g_2]$, to $\varphi_{g_1} = \varphi_{g_2}$, powieważ warunek $[g_1]=[g_2]$ oznacza, że $g_1=g_2$ μ-p.w.

W szczególnym przypadku, gdy $\Omega=\mathbb{N}$ i $\mu=\#$ (utożsamiając jak zwykle w tym przypadku $\mathcal{L}^p$ z $\widetilde{\mathcal{L}}^p$), mamy dla $y\in\ell^q(\mathbb{N})$ $\varphi_y:\ell^p(\mathbb{N})\to\mathbb{K}$ zadane wzorem

$$\varphi_y(x):=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n y_n\,,\qquad x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p(\mathbb{N}) \qquad (3')$$

oraz $\varphi_y\in(\ell^p(\mathbb{N}))^*$, $\|\varphi_y\|\le\|y\|_q$.

Zupełnie podobnie będziemy mieli w przestrzeniach wagowych $\ell^p_w(\mathbb{N})$, a ogólniej $\ell^p_w(\Omega)$ (tu wciąż $p\in(1;+\infty)$, a $w>0$): dla każdego $y\in\ell^q_w(\Omega)$ funkcjonał $\varphi_y:\ell^p_w(\Omega)\to\mathbb{K}$ zdefiniowany jest wzorem

$$\varphi_y(x):=\int_\Omega x(t)y(t)w(t)\,d\#(t)=\sum_{t\in\Omega}x(t)y(t)w(t)^{*)},\qquad x\in\ell^p_w(\Omega) \qquad (3'')$$

i $\varphi_y\in(\ell^p_w(\Omega))^*$, $\|\varphi_y\|\le\|y\|_{q,w}$.

$\boxed{\text{Zadanie}}$ $\longrightarrow$ $\triangle$

Wykaż (przynajmniej gdy $\Omega=\mathbb{N}$ i $w\equiv1$), że $\|\varphi_y\|=\|y\|_{q,w}$.

---

*) (– patrz też *) z PB-28, gdzie $\sum_{t\in A}f(t)$ określona była dla wszystkich $f:A\to[0;+\infty]$). Równość ta, to bezpośrednia konsekwencja wzoru na całkę z funkcji całkowalnej względem miary # (– Teoria Miary i Całki ...). Przypomnijmy, że $f:A\to\mathbb{C}$ jest całkowalna względem # wtw $\sum_{t\in A}|f(t)|=\int_A|f|\,d\#<+\infty$ i wówczas $\int_A f\,d\#=\sum_{t\in A}f(t)$, gdzie $\sum_{t\in A}f(t):=\sum_{t\in A}(\mathrm{Re}\,f)(t)+i\sum_{t\in A}(\mathrm{Im}\,f)(t)$, natomiast dla (całkowalnej) $f:A\to\mathbb{R}$ $\sum_{t\in A}f(t):=\sum_{t\in A}f_+(t)-\sum_{t\in A}f_-(t)$, gdzie $f_+(t)=\max(f(t),0)$, $f_-(t)=-\min(f(t),0)$.

(b) $p=1$ Wówczas $q=+\infty$, $g\in\mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M})$. Wtedy dla $f\in\tilde{\mathcal{L}}^1$, dla dowolnego Z t.że $\mu(Z)=0$ mamy

$$\left|\int_\Omega fg\,d\mu\right|\leq\int_{\Omega\setminus Z}|f||g|\,d\mu\leq\sup_{t\in\Omega\setminus Z}|g(t)|\cdot\|[f]\|_1,$$

więc na mocy Faktu ze strony PB-60 mamy:

$$\varphi_g\in\left(L^1(\Omega,\mu)\right)^*,\quad \|\varphi_g\|\leq\|[g]\|_{\infty\,ess}=\operatorname{supess}|g| \quad *)$$

W szczególnym przypadku, dla przestrzeni $\ell^1_w(\Omega)$ $(w>0)$ rozważamy więc $y\in\mathcal{M}_b(\Omega,2^\Omega)=\ell^\infty(\Omega)$ oraz

$$\varphi_y(x):=\sum_{t\in\Omega}x(t)y(t)w(t),\qquad x\in\ell^1_w(\Omega).$$

Wtedy $\|\varphi_y\|\leq\operatorname{supess}|y|=\|y\|_\infty$ – warto zwrócić tu uwagę, na brak zależności od wagi w po prawej stronie tej nierówności.

Zadanie $\rightarrow\triangle$

Wykaż, że $\|\varphi_y\|=\|y\|_\infty$!

(c) $p=+\infty$ Wówczas $q=1$, $g\in\tilde{\mathcal{L}}^1$. Wówczas dla $f\in\mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M})$ dzięki rachunkowi analogicznemu jak w (b) lecz z zamianą ról f i g otrzymujemy $\varphi_g\in\left(L^\infty(\Omega,\mu)\right)^*$, $\|\varphi_g\|\leq|||g|||_1=\|[g]\|_1$. $*)$

$*)$ Także tu, dla $p=1$ i $+\infty$, gdy $[g_1]=[g_2]$, to $\varphi_{g_1}=\varphi_{g_2}$ $\rightarrow\triangle$.

Znów, gdy rozważymy zatem $L^\infty(\Omega, w d\#)$ z $w>0$ to utożsamiamy ją po prostu z $\ell^\infty(\Omega)$ (– znów – bez zależności od w..., bo $\sup\mathrm{ess}|x| = \|x\|_\infty$ przy każdym $x \in \ell^\infty(\Omega)$ niezależnie od $w>0$). Teraz więc $y \in \ell^1_w(\Omega)$ i dla $x \in \mathcal{M}_b(\Omega, 2^\Omega) = \ell^\infty(\Omega)$

$$\varphi_y(x) := \sum_{t\in\Omega} x(t)\,y(t)\,w(t).$$

Ponadto $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_{1,w}$.

Zadanie → △

Wykaż, że $\|\varphi_y\| = \|y\|_{1,w}$.

Warto zauważyć, że wyniki opisane tu odrębnie dla (a), (b), (c) dadzą się elegancko ujednolicić, jeśli zamiast funkcjonałów φ_g, które jak widzieliśmy zależały nie tylko od samych g, ale od $[g]$, rozważymy funkcjonały $\Psi_{[g]} = \varphi_g$. A zatem dla <u>każdego</u> $p \in [1;+\infty]$, gdy $q = p^*$ i $[g] \in L^q(\Omega,\mu)$, to definiujemy $\Psi_{[g]} : L^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{K}$,

$$\Psi_{[g]}([f]) := \int_\Omega f g\, d\mu, \qquad [f] \in L^p(\Omega,\mu). \qquad (3''')$$

Fakt Niech $q = p^*$.

$$\forall_{[g]\in L^q(\Omega,\mu)} \quad \Psi_{[g]} \in \left(L^p(\Omega,\mu)\right)^* \;\; \text{i} \;\; \|\Psi_{[g]}\| \leq \|[g]\|_q,$$

gdzie $\| \;\|_q := \| \;\|_{\infty\,\mathrm{ess}}$ w przypadku $q = +\infty$ ($p = 1$).

◆ W $C(K)$, K – przestrzeń topologiczna zwarta.

Niech μ będzie dowolną skończoną miarą borelowską w K. Wówczas możemy zdefiniować $\varphi_\mu : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ wzorem

$$\varphi_\mu(f) := \int_K f \, d\mu \, , \qquad f \in C(K) \qquad (4)$$

i jasne jest, że $\varphi_\mu \in (C(K))^*$ oraz $\|\varphi_\mu\| \le \mu(K)$.

Możemy to jednak uogólnić, biorąc zamiast skończonej borelowskiej miary jakąkolwiek $\mathbb{K}$-miarę*) na σ-ciele zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(K)$. Wówczas funkcjonał φ_μ

*) patrz Appendix A.1.

zadany tym samym wzorem (4) na mocy Faktu „Ocałce" z App. A.1 jest ciągły:

$$\varphi_\mu \in (C(K))^* \quad \text{oraz} \quad \|\varphi_\mu\| \leq (\operatorname{var}\mu)(K) = \|\mu\|_{var}.$$

Również ten wynik istotnie wzmocnimy w przyszłości...

Opiszmy jeszcze pewien szczególny funkcjonał z tej klasy, wyznaczony przez miary skończone (nieujemne). Niech bowiem dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ μ_1 i μ_2 będą dwiema skończonymi miarami borelowskimi wówczas $\mu=\mu_1-\mu_2$ jest $\mathbb{R}$-miarą (miarą rzeczywistą) i opisany wyżej funkcjonał ma postać:

$$\varphi(f) := \int_K f\,d\mu_1 - \int_K f\,d\mu_2, \qquad f \in C(K)$$

Gdy natomiast $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, możemy rozważać cztery miary skończone μ_1, μ_2 i μ_1', μ_2' oraz $\mu=(\mu_1-\mu_2)+i(\mu_1'-\mu_2')$ i wtedy

$$\varphi(f) := \int_K f\,d\mu_1 - \int_K f\,d\mu_2 + i\left(\int_K f\,d\mu_3 - \int_K f\,d\mu_4\right),$$

dla $f \in C(K)$.

Wśród funkcjonałów tu zadanych na szczególną uwagę zasługują bardzo proste funkcjonały „wartość funkcji w ustalonym punkcie" — niech $t_0 \in K$ i zdefiniujmy $V_{t_0}: C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ wzorem

$$V_{t_0}(f) := f(t_0), \qquad f \in C(K).$$

Oczywiście $V_{t_0} \in (C(K))^*$ i $\|V_{t_0}\|=1$. Warto zauważyć, że V_{t_0} należy do każdej z omawianych wyżej klas funkcjonałów — po prostu $V_{t_0}=\varphi_{\delta_{t_0}}$, gdzie δ_{t_0} to miara „δ w t_0" (tzn. $\delta_{t_0}(\omega)=\begin{cases}1 & t_0\in\omega\\ 0 & t_0\notin\omega\end{cases}$, $\omega\in\mathcal{B}(K)$).

W $\ell^{\infty}(\Omega)$ i w $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$

Zauważmy najpierw, że gdy $\mathfrak{M} = 2^{\Omega}$, to po prostu $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) = \ell^{\infty}(\Omega)$. Zajmiemy się więc ogólnie przykładami funkcjonałów na $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, gdzie $\mathfrak{M}$ – pełne σ-ciało podzbiorów Ω.

Rozważmy $\mu \in \ell add(\mathfrak{M})$ — addytywną $\mathbb{K}$-miarę na $\mathfrak{M}$ *)

Określmy $\varphi_\mu : \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbb{K}$ przy pomocy całki względem μ:

$$\varphi_\mu(f) := \int_{\Omega} f \, d\mu \qquad (5)$$

Wówczas oczywiście φ_μ jest liniowym funkcjonałem, co więcej – na mocy Faktu „O całce" z Apendixu A.1 zachodzi

$$\varphi_\mu \in \left(\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})\right)^* \quad \text{i} \quad \|\varphi_\mu\| \leq \|\mu\|_{var}. \qquad (6)$$

$\boxed{\text{Zadanie}}$ $\longrightarrow$ △

Znajdź wszystkie $\mathbb{K}$-miary**) μ na $\mathfrak{M} = 2^{\mathbb{N}}$, $\Omega = \mathbb{N}$ i wypisz „jawnie" wzór opisujący φ_μ. Porównaj wynik z klasą uzyskanych wcześniej funkcjonałów φ_y ze strony OF-62.

---

*) Patrz Appendix A.1. Mimo, że $\mathfrak{M}$ jest „aż" σ-ciałem, nie tylko ciałem, nie zakładamy z góry, że $\mu \in \ell_{\sigma\text{-add}}(\mathfrak{M})$.

**) tu więc jednak jest $\mu \in \ell_{\sigma\text{-add}}(\mathfrak{M})$.