Potok przekształceń harmonicznych

PROWADZĄCY: Michał Miśkiewicz

(m.miskiewicz@mimuw.edu.pl)

- Wykład monograficzny
- Semestr zimowy 2021/22
- Wykład (30h) + Ćwiczenia (30h)
- Zaliczenie: egzamin domowy

Wykłady o Wykładach

Warszawa, 14 czerwca 2021

Motywacja – równanie ciepła

$u(t,x)\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u \\ u(0,x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

✓ Jawne jednoznaczne rozwiązanie

$$u(t,x) = \left((4\pi t)^{-1/2}\exp(-|x|^2/4t)\right) * g(x)$$

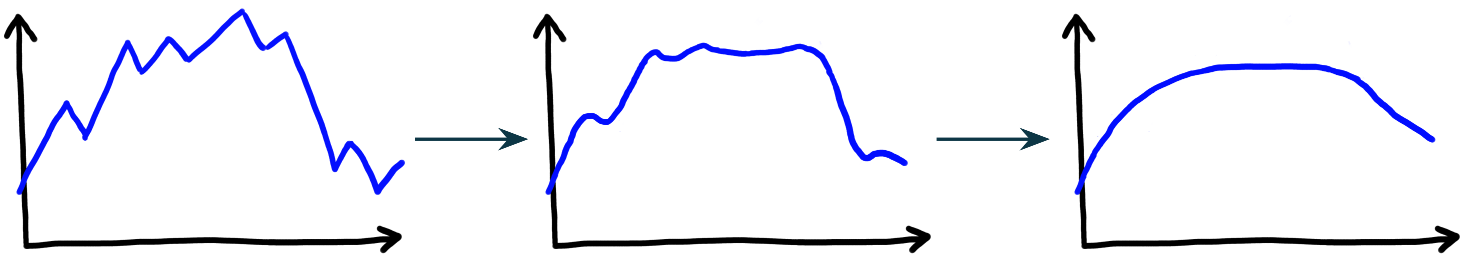
Motywacja – równanie ciepła

$u(t,x)\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u \\ u(0,x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

✓ Jawne jednoznaczne rozwiązanie

$$u(t,x) = \Big((4\pi t)^{-1/2}\exp(-|x|^2/4t)\Big) * g(x)$$



✓ Potok ciepła „wygładza” funkcję g

Motywacja – równanie ciepła

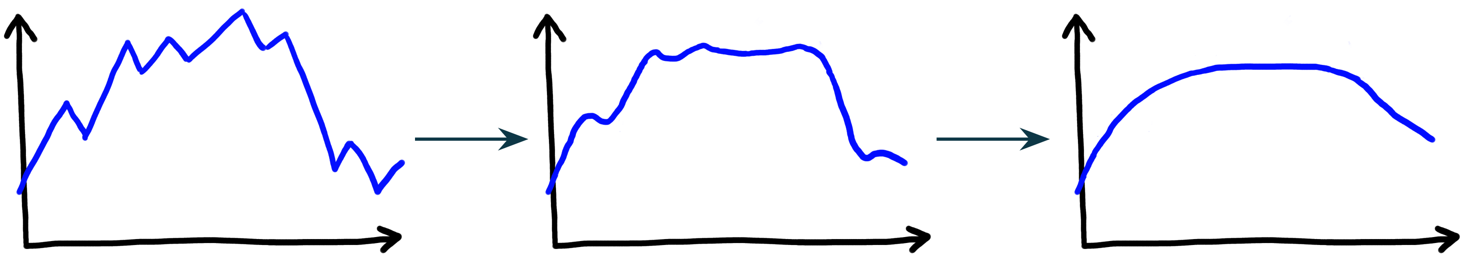
$u(t,x)\colon [0,\infty)\times\cancel{\mathbb{R}}\to\cancel{\mathbb{R}}$

zadane z góry rozmaitości

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u \\ u(0,x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

✓ Jawne jednoznaczne rozwiązanie

$$u(t,x) = \Big((4\pi t)^{-1/2}\exp(-|x|^2/4t)\Big) * g(x)$$



✓ Potok ciepła „wygładza” funkcję g

Potok przekształceń harmonicznych:

$\partial_t u = \Delta u$

Które własności pozostają prawdziwe?

Przykład – potok przekszt. harm. ze sfery w sferę

$u(t,x)\colon [0,\infty) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u \\ u(0,x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

✗ W ogólności – problem z istnieniem i jednoznacznością

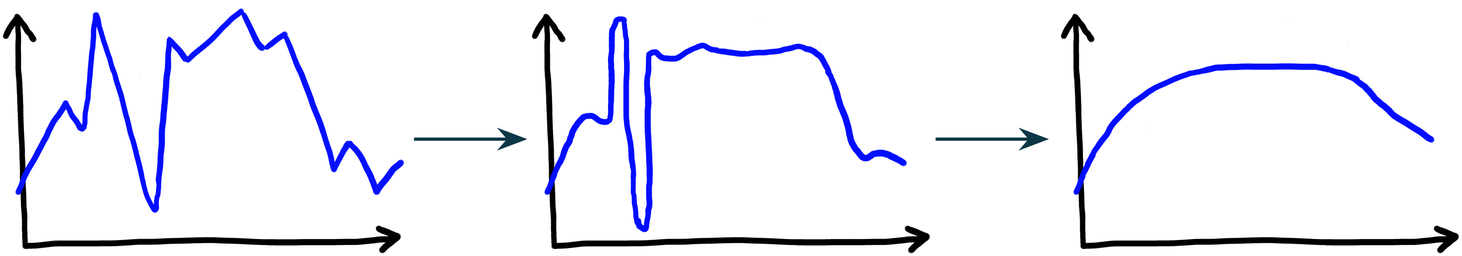
Przykład – potok przekszt. harm. ze sfery w sferę

$u(t, x)\colon [0, \infty) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u \\ u(0, x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

✗ W ogólności – problem z istnieniem i jednoznacznością

(wizja artystyczna)



✗ Efekt wygładzania tylko częściowy

Przykład – potok przekszt. harm. ze sfery w sferę

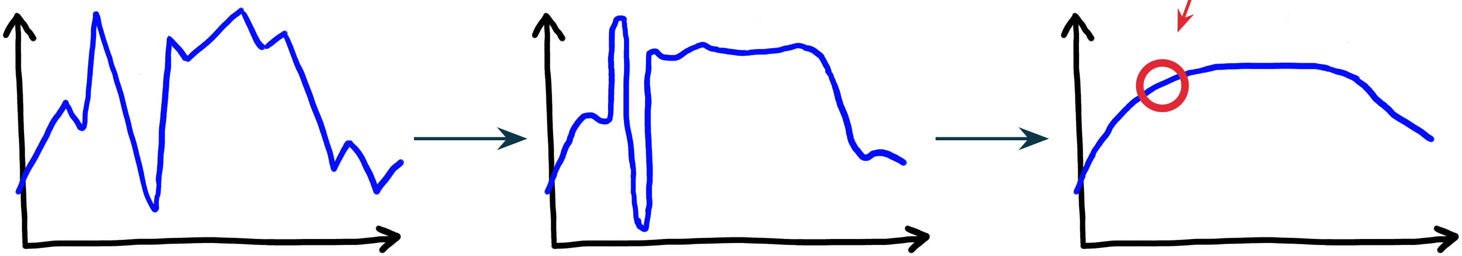
$u(t,x)\colon [0,\infty) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u \\ u(0,x) = g(x) \quad \text{(zadane z góry)} \end{cases}$$

To się nazywa bąblowanie / osobliwość

✗ W ogólności – problem z istnieniem i jednoznacznością

(wizja artystyczna)



✗ Efekt wygładzania tylko częściowy

O czym to będzie?

- Uzupełnienie wiedzy z geometrii różniczkowej i równań cząstkowych
- Konstrukcja potoku przekształceń harmonicznych
- Zjawisko bąblowania
- Charakteryzacja zbioru osobliwego
- Wpływ geometrii rozmaitości na powstawanie (lub nie) osobliwości

O czym to będzie?

- Uzupełnienie wiedzy z geometrii różniczkowej i równań cząstkowych
- Konstrukcja potoku przekształceń harmonicznych
- Zjawisko bąblowania
- Charakteryzacja zbioru osobliwego
- Wpływ geometrii rozmaitości na powstawanie (lub nie) osobliwości

+ rzeczy nieprzewidziane!

(wg preferencji uczestników)

Z czym to się je?

Analiza Matematyczna II.1 i II.2

– Co to jest (pod-)rozmaitość?

– Otoczenie tubularne?

Wstęp do równań różniczkowych cząstkowych

– Własności równania ciepła

– Czym są słabe rozwiązania?

Analiza funkcjonalna, Geometria różniczkowa

– Mile widziane i pomocne, ale wszystkie potrzebne narzędzia będą wprowadzone na wykładzie

Zainteresowanych zachęcam, żeby zapytać mnie bezpośrednio o szczegóły:

E-mail / Rocket Chat / Pokój 1220