

# 1 Przestrzenie unormowane

**Zadanie 1.1.** Wykazać, że przekształcenie liniowe  $T(x, y) = (x - y, x + y)$  spełnia tożsamość  $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$ .

*Wskazówka.* Sprawdzić, że  $T$  przeprowadza kulę jednostkową na kulę jednostkową.

**Zadanie 1.2.** Rozstrzygnąć, czy istnieje przekształcenie liniowe  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  spełniające  $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$ .

**Zadanie 1.3.** Na przestrzeni liniowej  $X$  dana jest norma  $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ . Wykazać, że jest ona funkcją ciągłą w topologii wyznaczonej przez tę właśnie normę.

**Zadanie 1.4.** Sprawdzić, że przestrzenie  $c$ ,  $c_0$  oraz  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) są ośrodkowe, tzn. każda z nich posiada przeliczalny zbiór gęsty.

**Zadanie 1.5.** Wykazać, że  $\ell_\infty$  nie jest przestrzenią ośrodkową.

*Wskazówka.* Wskazać nieprzeliczalny zbiór punktów odległych parami o co najmniej 1.

**Zadanie 1.6.** Dowieść, że dla każdego  $f \in L_\infty(X, \mu)$  istnieje zbiór  $A \subseteq X$  pełnej miary, dla którego

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

**Zadanie 1.7.** Rozważmy zbiór  $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  z topologią euklidesową oraz przestrzenie

$$\begin{aligned} X &= C(A), \\ Y &= \{f \in C(A) : f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Sprawdzić, że  $X$  jest izometryczne z  $c$ , a  $Y$  jest izometryczne z  $c_0$ .

*Uwaga.* Bardziej ogólnie,  $C_0(L)$  jest izometryczne z odpowiednią podprzestrzenią  $C(\bar{L})$ , gdzie  $\bar{L}$  jest uzwarceniem Aleksandrowa.

**Zadanie 1.8.** (nierówność Höldera) Dana jest przestrzeń  $X$  z miarą  $\mu$  oraz wykładniki  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  spełniające zależność  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ . Jeśli  $f \in L_p(\mu)$  i  $g \in L_q(\mu)$ , to również  $fg \in L_r(\mu)$ , a ponadto

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Uwaga.* Zadanie łatwo sprowadzić do przypadku  $r = 1$  (najbardziej klasycznej wersji nierówności Höldera). Wykładnik  $q$  spełniający  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  będzie nam często towarzyszyć, dlatego będziemy go oznaczać przez  $p'$ .

**Zadanie 1.9.** (nierówność Minkowskiego) Dana jest przestrzeń  $X$  z miarą  $\mu$  oraz wykładnik  $1 \leq p \leq \infty$ . Wówczas spełniona jest nierówność trójkąta

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{dla } f, g \in L_p(\mu).$$

*Wskazówka.* Zastosować nierówność Höldera dla  $|f||f + g|^{p-1}$  i  $|g||f + g|^{p-1}$ .

**Zadanie 1.10.** Na przestrzeni liniowej  $X$  dane są dwie normy  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ . Sprawdzić, że

$$\|\cdot\|_2 : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest funkcją } \|\cdot\|_1\text{-ciągłą} \iff \exists_{M>0} \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \text{dla } x \in X.$$

W takim przypadku mówimy, że  $\|\cdot\|_1$  jest normą *silniejszą* od  $\|\cdot\|_2$  ( $\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_1$ ).

**Zadanie 1.11.** Dwie normy  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  na tej samej przestrzeni liniowej  $X$  nazywamy *równoważnymi*, jeśli istnieje stała  $M > 0$  spełniająca

$$M^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \text{dla } x \in X.$$

Przekonać się, że dwie normy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczają tę samą topologię.

**Zadanie 1.12.** Na  $\mathbb{R}^n$  dana jest norma  $\|\cdot\|$ . Sprawdzić, że istnieje stała  $M > 0$  spełniająca

$$M^{-1} \leq \|x\| \leq M \quad \text{dla } x \in \partial[-1, 1]^n,$$

a więc norma  $\|\cdot\|$  jest równoważna normie supremum  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Zadanie 1.13.** Niech  $\Gamma$  będzie dowolnym zbiorem z miarą liczącą. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} c_0(\Gamma) &= \left\{ x : \Gamma \rightarrow \mathbb{K} : \{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| \geq \varepsilon\} \text{ jest skończony dla dow. } \varepsilon > 0 \right\}, \\ \ell_\infty(\Gamma) &= \left\{ x : \Gamma \rightarrow \mathbb{K} : \|x\|_\infty := \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty \right\}, \\ \ell_p(\Gamma) &= \left\{ x : \Gamma \rightarrow \mathbb{K} : \|x\|_p^p := \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty). \end{aligned}$$

- (a) Sprawdzić, że jeśli  $x \in c_0(\Gamma)$  lub  $x \in \ell_p(\Gamma)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), to nośnik  $x$  (czyli zbiór tych  $\gamma \in \Gamma$ , dla których  $x(\gamma) \neq 0$ ) jest najwyżej przeliczalny.
- (b) Przekonać się, że jeśli  $\Gamma$  jest zbiorem nieprzeliczalnym, to żadna z przestrzeni  $c_0(\Gamma)$ ,  $\ell_p(\Gamma)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) nie jest ośrodkowa.

**Zadanie 1.14.** Niech  $T: X \rightarrow Y$  będzie operatorem liniowym między dwiema przestrzeniami unormowanymi. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (a)  $T$  jest operatorem ograniczonym, tzn. dla pewnej stałej  $M \geq 0$  spełniony jest warunek  $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$  dla  $x \in X$ ;
- (b) operator  $T$  jest ciągły;
- (c) operator  $T$  jest ciągły w jakimś punkcie  $x_0 \in X$ .

**Zadanie 1.15.** Niech  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami euklidesowymi  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  (z normą euklidesową). Wykazać, że norma operatorowa  $A$  to  $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$ , gdzie  $\lambda_{\max}$  jest największą wartością własną  $A^T A$ .