10 Praca domowa – zbieżność ciągów funkcyjnych

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć **we wtorek 9 kwietnia**. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 10.1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$g_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}.$$

Wskazówka. Można (choć nie trzeba) skorzystać z jednego z twierdzeń Diniego.

Zadanie 10.2. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną, to ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ zbiega do f' niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Niemal jednostajnie oznacza, że dla każdego $M > 0$ zachodzi $f_n \rightrightarrows f'$ na $[-M, M]$.