

1 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego. Jeśli $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) \, d\lambda_{n+m}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y) \right) \, d\lambda_n(x).$$

Uwaga 1. Ta sama równość zachodzi z odwrotną kolejnością całkowania, i w ogóle z dowolnym rozbiem $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ na dwie zmienne.

Uwaga 2. Całkowalność funkcji

$$y \mapsto f(x, y) \quad (\text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y)$$

jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 1.1. Dany jest graf o V wierzchołkach i E krawędziach, w którym z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie.

- Wykazać, że $3V = 2E$.
- Jaki ma to związek z twierdzeniem Fubiniego?

Zadanie 1.2. (zasada Cavalieriego) Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) \, dt.$$

Wskazówka. Obliczyć całkę z indykatora zbioru $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t < f(x)\}$.

Zadanie 1.3. Dla funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $p \geq 1$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\lambda_n(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \, dt.$$

Zadanie 1.4. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

- na kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n ?
- na dopełnieniu kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n ?

Wskazówka. Dla $n = 1$ odpowiedź brzmi odpowiednio: $\alpha > -1$, $\alpha < -1$.

Zadanie 1.5. Obliczyć pole koła o promieniu r , czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 < r\}} d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.6. Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Wskazówka. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2(x, y)$, korzystając z twierdzenia Fubniego i zasady Cavalieriego.

Zadanie 1.7. Wyznaczyć wartość całki iterowanej

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$$

poprzez podstawienie $x = yt$ w wewnętrznej całce i zastosowanie twierdzenia Fubniego.

Zadanie 1.8. Uzasadnić, że funkcja $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowna w $[0, 1]^2$.

Zadanie 1.9. Obliczyć całkę $\int_A f d\lambda_2$, gdzie

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x\}$, | $f(x, y) = (1 - x + y)e^{-x}$; |
| (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x, x^2y \leq 16\}$, | $f(x, y) = 1$; |
| (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, | $f(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$; |
| (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$, | $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. |

Uwaga. Nie w każdym przypadku jest oczywiste, że założenia twierdzenia Fubniego są spełnione.

Zadanie 1.10. (a) Niech A będzie zwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2 d\lambda_2(x, y).$$

(b) Niech B będzie zwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2 d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.11. Obliczyć całki

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx, \quad \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy, \quad \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx, \quad \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy.$$

Zadanie 1.12. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch (nie-skończonych) walców o promieniu 1 i prostopadle przecinających się osiach.

Zadanie 1.13. Obliczyć całkę

$$\int_{[-1,1]^2} (1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3) d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.14. Dany jest wielomian $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o współczynnikach z przedziału $[-1, 1]$. Wykazać, że

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy) d\lambda_2(x, y) \leq 8.$$

Czy stałą 8 można poprawić?

Zadanie 1.15. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-t}$.

Uwaga. Można się przekonać (Zadanie 2.8), że lewa strona jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 1.16. Dla funkcji całkwalnej f wyprowadzić równość

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

Zadanie 1.17. Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Wskazówka. (sposób I) Zapisać różnicę $e^{-ax} - e^{-bx} = e^{-tx} \Big|_{t=a}^{t=b}$ jako całkę z pochodnej.

Wskazówka. (sposób II) Całkę po przedziale $[\varepsilon, \infty)$ sprowadzić przez podstawienie do całki $[a, b]$, a następnie przejść do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Zadanie 1.18. Niech $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Wyprowadzić wzór na całkowanie przez części:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wywnioskować równości

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Delta f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 f(x)|^2 dx,$$

w których Δ oznacza operator Laplace'a: $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Zadanie 1.19. Noga grzyba ma kształt walca (o średnicy 1 i wysokości 2), a na niej leży symetrycznie kapelusz grzyba, będący półkulą (o promieniu R). Przy założeniu, że grzyb jest bryłą jednorodną, a jego środek ciężkości leży na styku nogi i kapelusza, znaleźć promień R .

Zadanie 1.20. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem dodatniej miary λ_n . Pokazać, że rzut ortogonalny na k -wymiarową podprzestrzeń liniową $V \subseteq \mathbb{R}^n$ nie może być zbiorem zerowej miary λ_k .

Uwaga. Taki rzut nie musi być mierzalny. Przykład: jeśli $N \subseteq (0, 1)$ jest zbiorem niemierzalnym, to rzut $A = (N \times \{0\}) \cup (1, 2)^2$ na pierwszą współrzędną jest niemierzalny, chociaż sam zbiór A jest mierzalny.

Zadanie 1.21. Obliczyć całkę

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\lambda_n(x)$$

na dwa sposoby i wywnioskować wzór na miarę kuli jednostkowej:

$$\lambda_n(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

gdzie $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} dx$ jest funkcją gamma Eulera.

Wskazówka. Zadanie 1.6.

Zadanie 1.22. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o skończonej mierze Lebesgue'a. Udowodnić implikację

$$\int_{A \times A} |x - y|^2 d\lambda_{2n}(x, y) < \infty \quad \implies \quad \int_A |x| d\lambda_n(x) < \infty.$$

2 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie o zamianie zmiennych. Jeśli $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ jest dyfeomorfizmem dwóch zbiorów otwartych $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\Omega'} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n$$

Uwaga 1. Całkowalność funkcji $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 2. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 2.1. Obliczyć pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos \phi$.

Zadanie 2.2. ★ Dane są koła ω_1, ω_2 o promieniu 1. Pierwsze jest nieruchome, a drugie toczy się po nim bez poślizgu. Wyznaczyć pole ograniczone przez trajektorię wybranego punktu na obwodzie koła ω_2 .

Zadanie 2.3. Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Zadanie 2.4. Obliczyć całkę

$$\int_D x^2 + y^2 \, d\lambda_3(x, y, z), \quad \text{gdzie } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Zadanie 2.5. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu figury pod wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in [1, 2]$, wokół osi x .

Zadanie 2.6. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie figurą pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ na przedziale $x \in [1, \infty)$, a B bryłą obrotową powstałą przez obrót A wokół osi x . Wykazać, że $\lambda_2(A) = \infty$, ale $\lambda_3(B) < \infty$.

Zadanie 2.7. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o dodatniej i skończonej mierze Lebesgue'a, a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Przekonać się, że L przeprowadza środek ciężkości E na środek ciężkości $L(E)$.

Trudniejsza wersja. To samo pozostaje prawdą, gdy $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest epimorfizmem liniowym.

Zadanie 2.8. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x, y) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka. Obrócić o 45° , czyli zastosować podstawienie $x = u + v$, $y = u - v$.

Uwaga. Wraz z Zadaniem 1.15 daje to rozwiązanie problemu bazylejskiego: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (zob. T. Apostol, *A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, The Mathematical Intelligencer 1983, oraz [link](#))

Zadanie 2.9. Rozważmy następujące przekształcenia $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

(a) $\Phi(z) = z^2$,

(b) $\Phi(z) = e^z$.

Wskazać możliwie dużą dziedzinę $A \subseteq \mathbb{C}$, dla której $\Phi: A \rightarrow \Phi(A)$ jest dyfeomorfizmem. Jaki jest wyznacznik różniczki Φ ?

Zadanie 2.10. Wyznaczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y^2) d\lambda_2(x, y), \quad \text{gdzie } D = \{1 < x^2 - y^2 < 2, 2 < xy < 4, x, y \geq 0\}.$$

Zadanie 2.11. Dana jest krzywa bez samoprzebieć $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^2 , parametryzowana długością łuku. Oznaczmy wektor normalny $N(t) = (-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t))$ i rozważmy obszar

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot N(t) : t \in (a, b), |s| < r\}.$$

Wyznaczyć pole obszaru Γ_r dla małych $r > 0$. Jak ma się on do długości krzywej γ ?

Wyjaśnienie założeń. Bez samoprzebieć oznacza, że γ jest funkcją różnowartościową. Przez krzywą klasy C^2 rozumiemy, że γ przedłuża się do funkcji ciągłej na pewnym otwartym przedziale $(a', b') \supseteq [a, b]$. Parametryzacja długością łuku to inne określenie na warunek $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ dla wszystkich t .

Zadanie 2.12. Niech A będzie macierzą kwadratową, a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją zadaną wzorem $f(t) = \det(I + tA)$. Wyprowadzić równość $f'(0) = \text{tr } A$.

Trudniejsza wersja. Wyprowadzić wzór na $f'(0)$ dla funkcji $f(t) = \det(B + tA)$, gdzie B jest macierzą odwracalną.

Zadanie 2.13. ★ Niech $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, a $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkcją gładką o zwartym nośniku (tzn. zerującą się poza pewną kulą).

(a) Uzasadnić, że przekształcenie

$$\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(x) = x + t \cdot F(x)$$

jest dyfeomorfizmem dla t z pewnego przedziału $(-t_0, t_0)$. Wyznaczyć pochodną $\det D\Phi_t(x)$ względem t w punkcie $t = 0$.

(b) Niech Ψ_t będzie odwrotnością dyfeomorfizmu Φ_t z punktu a). Wykazać, że pochodną funkcji

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \int_{\mathbb{R}^n} h(\Psi_t(x)) \, dx$$

w punkcie $t = 0$ jest

$$f'(0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \right)}_{\text{ozn. } \operatorname{div} F(x)} \, dx.$$

Zadanie 2.14. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym, którego brzeg $\partial\Omega$ jest obrazem 1-okresowej funkcji $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^2 . Załóżmy ponadto, że $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ oraz że krzywizna $\kappa(t) := |\ddot{\gamma}(t)|$ jest dodatnia dla każdego t .

(a) Wyprowadzić równość $\kappa(t) = |\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t)|$.

(b) Uzasadnić, że $\int_0^1 \kappa(t) \, dt = 2\pi$.

(c) Dla zadanego (można przyjąć, że odpowiednio małego) $r > 0$ wyznaczyć pole obszaru

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot \dot{\gamma}(t) : t \in [0, 1], s \in [0, r]\}.$$

Wskazówka. W punkcie (a) zróżniczkować warunek $|\dot{\gamma}(t)|^2 \equiv 1$, by wyprowadzić prostopadłość $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$.

Wskazówka. W punkcie (b) rozważyć pochodną kąta $\alpha(t) := \arctan(\dot{\gamma}_1(t)/\dot{\gamma}_2(t))$. Można przyjąć za znany fakt, że wektor jednostkowy $\dot{\gamma}(t)$ na przedziale $t \in [0, 1]$ dokonuje obrotu o 2π .

Uwaga. Gdyby na rowerze o długości r zrobić okrążenie po wypukłym torze, to Γ_r jest dokładnie obszarem między śladami tylnego i przedniego koła ($\partial\Omega$ pełni tu rolę śladu tylnego koła). Więcej szczegółów można znaleźć w artykule *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture*, The American Mathematical Monthly, 2013 ([link](#)).

Zadanie 2.15. Dane jest funkcja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ozn. $p = (x, y)$) klasy C^1 oraz obszar

$$E_T := \{r \cdot p(t) : r \in (0, 1), t \in (0, T)\}$$

„zamiciony” przez wektor $p(t)$ w czasie $t \in (0, 1)$. Zakładając, że funkcja $L := \dot{x}y - x\dot{y}$ nie zeruje się dla $0 \leq t \leq T$, wyprowadzić wzór na pole obszaru E_T

$$\lambda_2(E_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |L(t)| dt$$

dla dostatecznie małych $T > 0$.

Uwaga. Zadanie to pokazuje równoważność między zachowaniem momentu pędu (wyrażonego wzorem $|p \times \dot{p}|$) a II prawem Keplera (wyrażonym jako proporcjonalność pola E_T do czasu T).

Rozwiązanie zadania 2.11 (szkic). Oznaczmy

$$\Phi(t, s) = \gamma(t) + s \cdot N(t), \quad \kappa(t) = \ddot{\gamma}(t)\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t)\ddot{\gamma}(t).$$

Obliczamy bezpośrednio, że $\det D\Phi(t, s) = 1 + s\kappa(t)$. Jeśli przyjmiemy ograniczenie $|\kappa(t)| \leq M$ oraz $r < \frac{1}{M}$, to $\det D\Phi(t, s) > 1 - \frac{1}{M} \cdot M = 0$ na zbiorze $(a, b) \times (-r, r)$. Jeśli tylko Φ jest dyfeomorfizmem, to obliczamy

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Gamma_r) &= \int_{\Gamma_r} 1 \, d\lambda_2 = \int_{(a,b) \times (-r,r)} 1 + s\kappa(t) \, d\lambda_2 \\ &= \int_a^b \int_{-r}^r 1 + s\kappa(t) \, ds \, dt = \int_a^b 2r \, dt = 2r \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Zgodnie z oczekiwaniami miarą zbioru Γ_r jest długość krzywej $(b - a)$ pomnożona przez szerokość wziętego otoczenia $(2r)$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej oraz warunku $\det D\Phi > 0$ wynika, że Φ jest dyfeomorfizmem lokalnie na $(a, b) \times (-r, r)$. Pozostaje więc sprawdzić różnowartościowość Φ (być może zmniejszając w tym celu dziedzinę), co można zrobić na jeden z wielu sposobów:

SPOSÓB I. Oznaczmy interesującą nas krzywą jako $\Gamma := \gamma([a, b])$. Skoro $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$ jest bijekcją, to posiada odwrotność $\Gamma \rightarrow [a, b]$. Ze względu na zwartość $[a, b]$ ta odwrotność jest ciągła, a nawet jednostajnie ciągła. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc $\delta(\varepsilon) > 0$ taka, że $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \delta(\varepsilon)$ implikuje $|t_1 - t_2| < \varepsilon$.

Twierdzenie o funkcji odwrotnej dla każdego $t \in [a, b]$ daje nam otoczenie punktu $(t, 0)$, na którym Φ jest dyfeomorfizmem. Dzięki zwartości możemy więc pokryć odcinek $[a, b]$ skończenie wieloma przedziałami (l_i, p_i) ($i = 1, \dots, m$) o tej własności, że Φ jest różnowartościowe na $(l_i, p_i) \times (-r_i, r_i)$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia, czyli taką liczbą, że każdy pododcinek $[a, b]$ długości $< \lambda$ mieści się w którymś z odcinków (l_i, p_i) . Wybieramy teraz

$$r' := \min(\delta(\lambda)/2, r_1, \dots, r_m),$$

gdzie $\delta(\lambda)$ oznacza wartość δ odpowiadającą $\varepsilon = \lambda$ w warunku jednostajnej ciągłości γ^{-1} . Jeśli teraz dla dwóch punktów $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in (a, b) \times (-r', r')$ zachodzi równość $\Phi(t_1, s_1) = \Phi(t_2, s_2)$, to

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |(\Phi(t_1, 0) - \Phi(t_1, s_1)) + (\Phi(t_2, s_2) - \Phi(t_2, 0))| \leq |s_1| + |s_2| < \delta(\lambda).$$

Wnioskujemy więc, że $|t_1 - t_2| < \lambda$, co oznacza, że oba punkty t_1, t_2 zawierają się w jednym z przedziałów (l_i, p_i) . Z różnowartościowości na $(l_i, p_i) \times (-r', r')$ wynika teraz, że musi zachodzić $(t_1, s_1) = (t_2, s_2)$, tak jak żądamy.

SPOSÓB II. Oznaczmy pomocniczo $E = [a, b] \times [-r, r]$ i rozważmy zbiór

$$A = \{(x, y) \in E \times E : x \neq y, \Phi(x) = \Phi(y)\},$$

czyli zbiór par „przeczących różnowartościowości”. Naszym celem jest pokazanie, że dla pewnego $0 < r' < r$ jest on rozłączny z $[a, b] \times (-r', r')$. Zauważmy więc najpierw, że A jest rozłączny z $([a, b] \times \{0\})^2$ – ta obserwacja okazuje się równoważna różnowartościowości γ , co przyjęliśmy jako założenie.

Uzasadnimy też, że A jest domknięty. W tym celu zauważmy najpierw, że jego domknięcie zawiera się w $\{(x, y) \in E^2 : \Phi(x) = \Phi(y)\}$. Gdyby w tym domknięciu był punkt postaci (x, x) , to moglibyśmy wziąć otoczenie $U \ni x$, na którym funkcja Φ jest różnowartościowa, co oznacza, że punkt (x, x) posiada otoczenie U^2 rozłączne z A . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że domknięcie A nie zawiera punktów spoza A .

Z domkniętości zbioru $A \subseteq E^2$ wynika jego zwartość, więc funkcja ciągła

$$g((t_1, s_2), (t_2, s_2)) = |s_1| + |s_2|$$

przyjmuje na nim swoje minimum. To minimum jest niezerowe, co sprowadza się do wcześniejszej obserwacji o rozłączności zbiorów A oraz $([a, b] \times \{0\})^2$. Mamy więc $g \geq 2\varepsilon$ na A (dla pewnego $\varepsilon > 0$). Natomiast dla punktów $x, y \in ((a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon))^2$ mamy $g(x, y) < 2\varepsilon$, co dowodzi żądanej rozłączności i kończy dowód.

SPOSÓB III. Przypuśćmy, że nie istnieje żądane $r' > 0$ takie, by Φ było różnowartościowe na $[a, b] \times (-r', r')$. Dla każdego $r' = \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) możemy więc wybrać różne $(t_k, s_k), (t'_k, s'_k) \in [a, b] \times (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ spełniające $\Phi(t_k, s_k) = \Phi(t'_k, s'_k)$. Oczywiście $s_k, s'_k \rightarrow 0$, możemy też wybrać podciągi, na których mamy zbieżność $t_k \rightarrow t, t'_k \rightarrow t'$. W granicy zachodzi równość $\Phi(t, 0) = \Phi(t', 0)$, czyli $\gamma(t) = \gamma(t')$, a zatem $t = t'$. Jednak w pewnym otoczeniu U punktu $(t, 0)$ funkcja Φ jest różnowartościowa, a dla dużych k mamy $(t_k, s_k), (t'_k, s'_k) \in U$, co prowadzi do sprzeczności.

3 Sploty

Splot funkcji $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy$$

Splot ciągów $a, b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$(a * b)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k$$

Zadanie 3.1. Dane są dwie niezależne ograniczone zmienne losowe A, B o wartościach w liczbach naturalnych. Oznaczmy $a_k := \mathbb{P}(A = k)$, $b_k := \mathbb{P}(B = k)$ oraz $c_k := \mathbb{P}(A + B = k)$. Wykazać, że ciąg (c_k) jest splotem ciągów (a_k) i (b_k) , to znaczy

$$c_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{k-i} b_i.$$

Przekonać się również, że wielomian $\sum c_k x^k$ jest iloczynem wielomianów $\sum a_k x^k$ i $\sum b_k x^k$.

Zadanie 3.2. Znaleźć przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dla których całka definiująca $f * g(0)$ nie jest zbieżna.

Zadanie 3.3. Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0, 1])$ spełniający $\|f_n\|_{L^1} \leq 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $L^1([0, 1])$.

Uwaga. Istnienie takiego ciągu pokazuje, że kula jednostkowa w przestrzeni $L^1([0, 1])$ nie jest zwarta.

Zadanie 3.4. Niech $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f(x)| \, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Zadanie 3.5. Wykazać, że przestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$ z działaniem splotu nie posiada jedynki: nie istnieje funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, spełniająca $f * g = g$ dla wszystkich $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wskazówka. Sprawdzić tę równość w przypadku funkcji g będącej indykátorem małego zbioru.

Zadanie 3.6. Pokazać, że dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto f(\cdot - v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą.

Wskazówka. Warto skorzystać z faktu, że funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3.7. Dla $a, b > 0$ przyjmijmy

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{oraz} \quad B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Wyprowadzić tożsamość $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Wskazówka. Wykorzystać splot funkcji $f_c(x) = x^{c-1} e^{-x} \mathbb{1}_{x>0}$ dla $c = a, b$.

Zadanie 3.8. Wykazać, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga. Norma L^∞ jest prawie jak norma supremum:

$$\|f\|_{L^\infty} = \min\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.w.}\}$$

Przestrzeń L^∞ zawiera wszystkie funkcje ograniczone prawie wszędzie.

Zadanie 3.9. Jeśli $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to funkcja $\varphi * f$ jest gładka oraz $D^\alpha(\varphi * f) = (D^\alpha\varphi) * f$ dla dowolnego wieloskaźnika α .

Zadanie 3.10. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku i całce $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi$ równej 1; dla $r > 0$ określmy $\varphi_r(x) := r^{-n} \varphi(x/r)$. Wykazać, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to przy $r \rightarrow 0$ zachodzi zbieżność $\varphi_r * f \rightarrow f$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga. W połączeniu z poprzednim zadaniem oznacza to, że funkcje gładkie są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 3.11. (kostki Sichermana) Niech A, B będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na $\{1, \dots, 6\}$ (odpowiada to dwóm rzutom kostką). Znaleźć niezależne zmienne A', B' o innym rozkładzie na liczbach naturalnych, ale dające ten sam rozkład sumy $A' + B'$ co $A + B$.

Zadanie 3.12. Całki niewłaściwe

$$B_k := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} dx$$

są równe π dla $k = 0, 1, \dots, 6$. Ale dla $k = 7$ dostajemy

$$B_7 = \frac{467'807'924'713'440'738'696'537'864'469}{467'807'924'720'320'453'655'260'875'000} \pi = \pi - \underbrace{0,0000000000}_{10 \text{ zer}} 462 \dots$$

Sprawdzić, że podobny fenomen zachodzi przy splataniu funkcji $f_d := \frac{1}{d} \mathbb{1}_{(-d/2, d/2)}$. Otóż liczby

$$C_k := f_1 * f_{1/3} \dots * f_{1/(2k+1)}(0)$$

są równe 1 dla $k = 0, 1, \dots, 6$, ale dla $k = 7$ jest już mniej.

Uwaga. Polecam filmy na kanale Youtube 3Blue1Brown: [Researchers thought this was a bug \(Borwein integrals\)](#) oraz [But what is a convolution?](#)

Zadanie 3.13. Jeśli $p, q, r \geq 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, to

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Zadanie 3.14. Dla $t > 0$ określamy tak zwane jądro ciepła $g_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ (gęstość rozkładu normalnego o wariancji 2), następnie dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy $H_t f := f * g_t$. Wykazać, że

- (a) funkcja g_t spełnia równanie ciepła $\partial_t g = \Delta g$ (gdzie $\Delta = \partial_{11} + \dots + \partial_{nn}$);
- (b) funkcja $H_t f(x)$ (zmiennych t, x) jest gładka na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ i również spełnia $\partial_t f = \Delta f$;
- (c) $\|H_t f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$;
- (d) $H_t H_s f = H_{t+s} f$.

Wskazówka. W ostatnim punkcie warto najpierw wyprowadzić wzór

$$\partial_t (H_{r-t} f_t(x)) = (H_{r-t} (\partial_t f_t - \Delta f_t))(x)$$

(w którym f_t jest gładką funkcją dwóch zmiennych t, x).

4 Podrozmaitości \mathbb{R}^n

Definicja. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m -wymiarową *podrozmaitością* (inaczej: *rozmaitością zanurzoną*), jeśli lokalnie wygląda jak fragment \mathbb{R}^m . Można przyjąć dowolną z poniższych definicji:

M jest lokalnie wykresem: $\forall p \in M \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, U \subseteq \mathbb{R}^n, P := \text{span}(e_{i_j}), p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, P^\perp)$
 $M \cap V = \text{wykres } \varphi \cap V$

obrazem parametryzacji: $\forall p \in M \exists U \subseteq \mathbb{R}^m, p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V), \text{rank } D\varphi = m$
 $\varphi: U \rightarrow M \cap V$ jest homeomorfizmem

poziomicą submersji: $\forall p \in M \exists p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m}), \text{rank } D\varphi = n-m$
 $M \cap V = \text{poziomica } \varphi$

jak $\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}$: $\forall p \in M \exists p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V)$ dyfeomorfizm
 $M \cap V = \text{obraz } \mathbb{R}^m \times \mathbf{0} \text{ przy } \varphi$

Zadanie 4.1. Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus

$$T_{r,R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

otrzymany przez obrót okręgu $o((R, 0), r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z . Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, czyli zbiór

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozmaitością. Sprawdzić, że

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ((R + rx_1)x_3, (R + rx_1)x_4, rx_2)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \rightarrow T_{r,R}$.

Zadanie 4.2. Czy zbiory

$$A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}, \quad B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$$

w \mathbb{R}^3 są rozmaitościami klasy C^1 ?

Zadanie 4.3. Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (tj. 1-wymiarową rozmaitością) klasy C^1 . Czy jest to krzywa spójna?

Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $(x + y + z)^2$.

Zadanie 4.4. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0, 1, 0)$ do $D = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmaitość dwuwymiarowa w \mathbb{R}^3 .

Zadanie 4.5. Niech $f_\lambda(x, y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?
- (b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 4.6. Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n \times n} : Q^T Q = I\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I .

Wskazówka. Funkcja $F(Q) = Q^T Q$ nie jest submersją jako funkcja $F: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, ale jako $F: M_{n \times n} \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$ już tak.

Zadanie 4.7. Niech $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad F(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Sprawdzić, że $F(\mathbb{S}^2)$ jest zwartą rozmaitością.

Uwaga. Jest to tzw. *plaszczyna rzutowa*. Można podać jej prostszy opis: jest to sfera \mathbb{S}^2 z utożsamionymi punktami antypodycznymi (czyli parami x i $-x$).

Zadanie 4.8. Niech funkcja $f: (-\infty, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{dla } t \leq 0, \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Przekonać się, że f jest różnowartościową funkcją klasy C^1 . Czy jej obraz jest jednowymiarową podrozmaitością w \mathbb{R}^2 ?

Zadanie 4.9. Uzasadnić następujące pomocnicze fakty z topologii:

- (a) Załóżmy, że A jest przestrzenią zwartą, B przestrzenią Hausdorffa, a $f: A \rightarrow B$ jest ciągłą bijekcją. Wówczas f jest homeomorfizmem.
- (b) Załóżmy, że A, B są jak wyżej, natomiast $f: A \rightarrow B$ jest funkcją ciągłą spełniającą na pewnym podziorze $A_0 \subseteq A$ warunek

$$f(x) = f(y) \implies x = y \text{ lub } x, y \notin A_0.$$

Wówczas obcięcie $f|_{A_0}$ jest homeomorfizmem pomiędzy A_0 i $f(A_0)$.

Uwaga. Jeśli to ułatwi rozwiązanie, to można przyjąć, że A, B są przestrzeniami metrycznymi.

Zadanie 4.10. Przekonać się, że przekształcenie

$$i: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

jest gładkim dyfeomorfizmem spełniającym $i^2 = \text{id}$. Sprawdzić, że zadaje ono bijekcję pomiędzy zbiorami

$$P = \{x : x_1 = 1\}, \quad S = \left\{x : \left|x - \frac{1}{2}e_1\right| = \frac{1}{2}\right\} \setminus \{0\},$$

a więc parametryzację sfery z wyjętym punktem

Zadanie 4.11. ★ Niech M będzie standardową wstęgą Möbiusa w \mathbb{R}^3 , np. opisaną przez parametryzację:

$$\begin{cases} x &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z &= \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases} \quad (0 \leq u < 2\pi, -1 < v < 1)$$

Wykazać, że choć M jest mnogością, to nie da się przedstawić jako poziomica submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , dla której

$$M = F^{-1}(0), \quad \text{rank } dF(x) = 1 \quad \text{dla } x \in M.$$

5 Wyznacznik Grama

Zadanie 5.1. (o wyznaczniku Grama)

- (a) Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi z iloczynem skalarnym, tego samego wymiaru, a $L: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym. Zdefiniujemy $|\det L|$ jako

$$|\det L| := \left| \det \left([L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \right) \right|,$$

gdzie $[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą L w pewnych bazach ortonormalnych \mathcal{U}, \mathcal{V} przestrzeni U, V . Sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru baz.

- (b) Przekonać się, że nadal obowiązują wzory $|\det(L_1 L_2)| = |\det L_1| \cdot |\det L_2|$ oraz $|\det L^T| = |\det L|$.
- (c) Przyjmijmy teraz, że $V \subseteq W$, przekształcenie $E: V \hookrightarrow W$ jest włożeniem (tzn. $E(v) = v$) oraz $M := EL$. Dowieść, że $\det(M^T M) = |\det L|^2$.
- (d) Załóżmy, że różniczka pewnego przekształcenia $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma rząd n (maksymalny). Oznaczmy przez $\overline{Df}: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{im } Df$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wykazać, że

$$\text{wyznacznik Grama} = \sqrt{\det(Df^T Df)} = |\det \overline{Df}|.$$

Uwaga. Jeśli rozważać przestrzenie liniowe z wybraną orientacją, to przez ograniczenie do baz dodatnio zorientowanych można zdefiniować $\det L$ bez modułu. Przykładowo, przekształcenie $M: U \rightarrow U$ ma dobrze zdefiniowany wyznacznik $\det M = \det[M]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}$ (niezależny od wyboru orientacji U , gdyż przyjmujemy tę samą bazę dwa razy).

Zadanie 5.2. Funkcje

$$\begin{aligned} f, g: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ f(\alpha, \beta) &= (\cos \beta, \sin \beta, \sin \alpha), \\ g(\alpha, \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha) \end{aligned}$$

parametryzują odpowiednio walec $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ oraz sferę \mathbb{S}^2 z wyjątkami biegunami $(0, 0, \pm 1)$.

- (a) Wyznaczyć obrazy wektorów bazy standardowej przy przekształceniu Df (czyli $\partial_{\alpha} f$ oraz $\partial_{\beta} f$), wybrać dogodną bazę $T_f C$ i obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$.
- (b) W podobny sposób obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Dg}|$.

- (c) Podać interpretację geometryczną przekształcenia $g \circ f^{-1}: C \rightarrow \mathbb{S}^2$. Uzasadnić, że przekształcenie liniowe

$$Dg \circ Df^{-1}: T_p C \rightarrow T_q \mathbb{S}^2$$

ma wyznacznik (w module) równy 1.

- (d) Obliczyć bezpośrednio wyznaczniki Grama $\sqrt{\det(Df^\top Df)}$, $\sqrt{\det(Dg^\top Dg)}$ i porównać z wynikami uzyskanymi w punktach a) i b).

Wywnioskować, że pole czaszy sfery zakreślonej cyrklem o rozwartości r ($0 < r < 2$) wynosi πr^2 .

Zadanie 5.3. Korzystając z wybranej przez siebie charakteryzacji, wyprowadzić wzory:

- (a) $|\det \overline{D\varphi}| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, gdy $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$;
 (b) $|\det \overline{D\varphi}| = |\varphi'|$, gdy $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

6 Miara powierzchniowa

Zadanie 6.1. Obliczyć długość krzywej zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 6.2. Obliczyć miarę powierzchni zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, t) \quad \text{dla } r \in (0, 1), t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 6.3. Znaleźć parametryzację krzywej opisanej równaniem

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

a następnie wyznaczyć jej długość na tyle jawnie, na ile się uda.

Zadanie 6.4. Obliczyć całkę

$$\int_C x^2 \, dl_C,$$

jeśli C to krzywa powstała w wyniku przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) z płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 6.5. Wyznaczyć miarę powierzchni M z Zadania 4.4.

Zadanie 6.6. Wykazać szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu po włóknach:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f(x) \, dl_{\partial B_r}(x) \, dr$$

dla odpowiednio regularnych funkcji f .

Uwaga. Równość zachodzi dla wszystkich $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ale na potrzeby rozwiązania można np. założyć ciągłość.

Zadanie 6.7. Wykazać, że średnia odległość punktów n -wymiarowej o promieniu R do środka tej kuli wynosi $\frac{n}{n+1}R$.

Zadanie 6.8. Obliczyć pole powierzchni paraboloidy

$$M = \{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Zadanie 6.9. Wyprowadzić wzór na miarę wykresu funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem f na zbiorze U , czyli zbiorem $\{(x, f(x)) : x \in U\}$, to

$$l(M) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

Zadanie 6.10. (reguła Pappusa-Guldina) Wykazać, że miara powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej Γ wynosi 2π razy całka po Γ z odległości do osi obrotu. Lub inaczej: $2\pi r \cdot l(\Gamma)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości Γ od osi obrotu.

Zadanie 6.11. Wyznaczyć wzór na pole powierzchni bocznej walca i stożka (o wysokości h i promieniu r) na dwa sposoby:

- (a) w oparciu o regułę Pappusa-Guldina;
- (b) przez wskazanie izometrycznej figury płaskiej w \mathbb{R}^2 (chodzi o to, żeby różniczka parametryzacji była włożeniem izometrycznym).

Zadanie 6.12. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie rozmaitością jednowymiarową, $f: M \rightarrow (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą, a $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiorem zadany przez

$$S = \{(x, y, t) : (x, y) \in M, 0 < t < f(x, y)\}.$$

Uzasadnić, że S jest rozmaitością 2-wymiarową oraz że

$$l(S) = \int_M f(x, y) dl_M(x, y).$$

Zadanie 6.13. Dane są rozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^M$ (m -wymiarowa) i $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ (n -wymiarowa). Wykazać, że zbiór

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$$

jest rozmaitością $m+n$ -wymiarową. Dla odpowiednio regularnych funkcji $f: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór

$$\int_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}} f(x, y) dl_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}}(x, y) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathcal{M}} f(x, y) dl_{\mathcal{M}}(x) dl_{\mathcal{N}}(y).$$

Zadanie 6.14. ★ (twierdzenie o całkowaniu po włóknach) Załóżmy, że $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a jej gradient nie zeruje się na zbiorze zwartym $K \subseteq U$. Dla odpowiednio regularnych funkcji f wyprowadzić wzór

$$\int_K f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{K \cap H^{-1}(t)} \frac{f(x)}{|\nabla H(x)|} \, dl_{H^{-1}(t)} \, dt.$$

Wskazówka. Można skorzystać z następującej wersji TFU: dla dowolnego punktu istnieje dyfeomorfizm otoczenia Φ spełniający tożsamość $H(\Phi(t, u)) = t$.