

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w środę **7 I 2026** (grupa środowa) lub w czwartek **8 I 2026** (grupa czwartkowa).

Zadanie 1. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $X_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla ustalonego $\lambda \in \mathbb{R}$ znaleźć taki deterministyczny ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$, aby ciąg $M_n = e^{\lambda S_n - a_n}$ był martyngałem względem naturalnej filtracji.

Zadanie 2. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla $a \geq 1$ niech $\tau = \inf\{n \geq 1 : |S_n| = a\}$.

(a) Wykazać, że dla odpowiednio dobranych stałych $b, c \in \mathbb{R}$ ciąg $M_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + bn^2 + cn$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

(b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\tau^2$.

Zadanie 3. Załóżmy, że M_n jest martyngałem takim, że $|M_{n+1} - M_n| \leq C < \infty$ dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od n . Niech

$$A = \left\{ \text{istnieje skończona granica } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \right\},$$
$$B = \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n = -\infty \text{ oraz } \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty \right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.