

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w środę **3 XII 2025** (grupa środowa) lub w czwartek **4 XII 2025** (grupa czwartkowa).

Zadanie 1. Załóżmy, że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, średniej równej 0 i wariancji równej 1. Załóżmy dodatkowo, że $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne. Wykazać, że wówczas X i Y mają rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. *Wskazówka:* wyprowadzić równanie funkcyjne, jakie musi spełniać funkcja charakterystyczna zmiennych X i Y .

Zadanie 2. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ , a N jest niezależną od nich zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem p . Wyznaczyć rozkład sumy $\sum_{n=1}^N X_n$.

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne X_n są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{(X_1 + \dots + X_n)^2 - 4n^2}{n^{3/2}}.$$

W przypadku kiedy ciąg jest zbieżny, należy wyznaczyć rozkład graniczny.