

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w środę **5 XI 2025** (grupa środowa) lub w czwartek **6 XI 2025** (grupa czwartkowa).

Zadanie 1. Załóżmy, że zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.

- (a) Wykazać, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

- (b) Załóżmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$. Czy wynika stąd zbieżność X_n według rozkładu?
- (c) Rozstrzygnąć, czy teza podpunktu (a) zachodzi, jeśli w treści zadania liczby całkowite zastąpimy liczbami wymiernymi.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ oznacza rozkład normalny o średniej a i wariancji σ^2 .

- (a) Wykazać, że jeśli ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \geq 1}$ oraz liczb dodatnich $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ są zbieżne, to ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest zbieżny.
- (b) Wykazać, że ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \geq 1}$ oraz liczb dodatnich $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ są ograniczone.
- (c) Wykazać, że ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest zbieżny do $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \rightarrow a$ oraz $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są zmiennymi niezależnymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem $a > 0$, to znaczy z gęstością

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Wykazać, że ciąg $Y_n = \frac{1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\}$ zbiega według rozkładu do zmiennej $\frac{1}{Y}$, gdzie Y ma rozkład wykładniczy. Wyznaczyć parametr tego rozkładu.