

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, zestaw 8.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że X_λ jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Wykazać, że przy $\lambda \rightarrow \infty$ zachodzi

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Zadanie 2. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym $\mathbb{E}X_i = 0$, $\text{Var}X_i = 1$. Wykazać, że

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{X_1^2 + \dots + X_n^2} &\Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \\ \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} &\Rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym $\mathbb{P}(X_i = a) = \mathbb{P}\left(X_i = \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$, gdzie $a > 1$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu $Z_n = (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$.

Zadanie 5. Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładając, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny, oszacować prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

Zadanie 6. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2^3 + \dots + X_n^{2n-1}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Zadanie 7. Załóżmy, że X jest zmienną losową taką, że $\text{Var} X = \sigma^2 < \infty$, oraz posiadającą następującą własność: jeśli Y, Z są niezależnymi kopiami X , to $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$. Wykazać, że wówczas $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Zadanie 8. Załóżmy, że schemat serii $X_{n,k}$, $n \geq 1, k \leq k_n$, spełnia warunek Lindeberga oraz $m_n = \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E} X_{n,k} \rightarrow m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, zaś $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{k_n} \text{Var} X_{n,k} \rightarrow 0$. Wykazać, że wówczas

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathbb{P}} m.$$