

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 7.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, a zmienna Rademachera ε jest niezależna od G . Wykazać, że każda ze zmiennych $X = G$, $Y = \varepsilon G$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ i są one nieskorelowane, ale nie są niezależne (w szczególności nie mają zatem łącznego rozkładu normalnego).

Zadanie 2. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym $|X_i| \leq K$ oraz $\sum_{n \geq 1} \text{Var } X_n = +\infty$. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = 1$ oraz $\mathbb{E}|X_i|^{2+\delta} \leq C$ dla pewnych $C, \delta > 0$. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, i przyjmijmy $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\sigma_n = \sqrt{\text{Var } S_n}$. Wykazać, że jeśli dla pewnego $\delta > 0$ spełniony jest tzw. *warunek Lapunowa*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^{2+\delta} = 0,$$

to wówczas

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym X_k ma rozkład jednostajny na odcinku $[-a_k, a_k]$. Niech $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var } X_k$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma_n},$$

jeśli:

(a) ciąg $(a_k)_{k \geq 1}$ jest ograniczony i $\sigma_n \rightarrow \infty$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$

Zadanie 6. Załóżmy, że zmienne $X_2, X_3, \dots$ są niezależne i mają następujący rozkład

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}, \\ \mathbb{P}(X_n = 1) &= \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_n}{n} = 2$, ale $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ (w szczególności nie może być zatem spełniony warunek Lindeberga).