

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 6.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Korzystając z funkcji charakterystycznych wykazać, że parzyste momenty rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$ dane są wzorem $m_{2n} = (2n - 1)!!$.

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja $\varphi(t) = \max\{0, 1 - |ct|\}$, $c \in \mathbb{R}$, jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa.

Zadanie 3. Załóżmy, że $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą, ciągłą w zerze, wypukłą i nie-rosnącą na przedziale $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$. Wykazać, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $c > 0$ i $\alpha \in (0, 1]$, to $\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $c > 0$ i $\alpha > 2$, to $\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną.

Zadanie 6. Załóżmy, że dla ustalonego $\alpha > 0$ i niezależnych X i Y o tym samym rozkładzie zachodzi następująca własność: dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zmienna $aX + bY$ ma ten sam rozkład, co $(|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} X$ (rozkład X nazywamy wówczas α -stabilnym). Wykazać, że funkcja charakterystyczna rozkładu α -stabilnego ma postać $e^{-c|t|^\alpha}$ dla pewnego $c \geq 0$.

Zadanie 7. Wykazać, że funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego z parametrem $a > 0$ dana jest wzorem $e^{-a|t|}$. Wywnioskować, że rozkład Cauchy'ego jest 1-stabilny.

Zadanie 8. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera. Wykazać, że zmienna losowa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.