

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, zestaw 5.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że zmienna losowa jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna przyjmuje wartości wyłącznie rzeczywiste.

Zadanie 2. Załóżmy, że zmienna losowa X przyjmuje wyłącznie wartości całkowite. Wykazać, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi wzór

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają tę samą funkcję charakterystyczną φ , a N jest niezależną od nich zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Wyznaczyć w terminach φ i λ funkcję charakterystyczną losowej sumy $X_1 + \dots + X_N$.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$, to $a_n X_n + b_n \Rightarrow aX + b$.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow X_0$ oraz $Y_n \Rightarrow Y_0$, gdzie X_n, Y_n są niezależne dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to $X_n + Y_n \Rightarrow X_0 + Y_0$. Podać przykład, że założenie o niezależności jest istotne.

Zadanie 6. Rozpatrzmy zmienne losowe X_n o rozkładzie

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad k = 1, \dots, n^2.$$

Wykazać, że zmienne losowe X_n nie są zbieżne według rozkładu.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X jest dwukrotnie różniczkowalna w zerze, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.