

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 3.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli w definicji słabej zbieżności zastąpimy klasę funkcji ciągłych i ograniczonych klasą funkcji lipschitzowskich i ograniczonych, to otrzymamy to samo pojęcie zbieżności.

Zadanie 2. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n \geq 1}$ jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$ zbieżnego do 0 ciąg $(a_n X_n)_{n \geq 1}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Zadanie 3. Określić, jaki warunek musi spełniać zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, aby ciasna była rodzina rozkładów:

- (a) wykładniczych $\{\text{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq (0, \infty)$,
- (b) jednostajnych $\{\mathcal{U}([a, b]) : a, b \in A, a < b\}$.

Zadanie 4. Niech X_n będzie n -wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu 1. Niech R_n będzie odległością X_n od 0.

- (a) Wykazać, że R_n zbiega według prawdopodobieństwa.
- (b) Rozstrzygnąć, czy ciąg $Y_n = n(1 - R_n)$ jest zbieżny według rozkładu, a jeśli tak – wyznaczyć jego granicę.

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienne losowe X_n i Y_n są określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przy czym X_n ma gęstość $g_n(x) = \frac{5}{2} n^5 x^4 \mathbb{1}_{\{|x| \leq \frac{1}{n}\}}$, a rozkład zmiennych Y_n jest zadany następująco:

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \left(1 - e^{-\frac{5}{n}}\right) e^{-\frac{5k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Rozstrzygnąć, czy ciąg $X_n + Y_n$ jest zbieżny według rozkładu, a jeśli tak, to wyznaczyć jego granicę.

Zadanie 6. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$, gdzie $X_n \sim \mu_n$, jest ciągiem zmiennych losowych spełniających $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|X_n|^\delta < \infty$ dla pewnego $\delta > 0$. Wykazać, że wówczas rodzina miar $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ jest ciasna.