

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 2.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że:

- (a) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $a, b \in \mathbb{R}$, to $aX_n + b \Rightarrow aX + b$.
- (b) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow 0$, to $X_n + Y_n \Rightarrow X$.
- (c) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$.
- (d) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow 0$, to $X_n Y_n \Rightarrow 0$.
- (e) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n Y_n \Rightarrow cX$.
- (f) Jeśli $X_n \Rightarrow X$ i $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, to $Y_n \Rightarrow X$.

Zadanie 2. Podać przykład ciągu dystrybuant F_n , który jest zbieżny punktowo, ale funkcja graniczna nie jest dystrybuantą.

Zadanie 3. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są zmiennymi niezależnymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągów $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $Z_n = n \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne losowe X_n, X o wartościach rzeczywistych mają gęstości odpowiednio g_n, g względem miary ν oraz $g_n \rightarrow g$ prawie wszędzie względem ν . Wykazać, że

$$\sup_A |\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| d\nu(x) \rightarrow 0,$$

gdzie $X_n \sim \mu_n$, $X \sim \mu$. Wywnioskować, że wówczas $X_n \Rightarrow X$. Podać przykład, że zbieżność według rozkładu w ogólności nie implikuje zbieżności do zera supremum po lewej stronie (w szczególności może nie zachodzić zbieżność $g_n \rightarrow g$ prawie wszędzie względem ν).