

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 11.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniającą warunek $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$. Wykazać, że jeśli ciąg X_n jest taki, że $\sup_n \mathbb{E}\varphi(|X_n|) < \infty$, to zmienne X_n są jednostajnie całkowalne.

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ i niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ określamy

$$Z_n = e^{\lambda S_n - n \frac{\lambda^2}{2}}.$$

Wykazać, że nadmartyngał Z_n jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L^1 ?

Zadanie 3. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2]$. Wykazać, że

$$M_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$$

jest martyngałem zbieżnym prawie na pewno, ale nie w L^1 .

Zadanie 4. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2 . Wykazać, że ciąg

$$M_n = \frac{1}{(n!)^2} X_1 \cdot \dots \cdot X_n$$

jest martyngałem oraz zbadać jego zbieżność prawie na pewno, w L^1 i w L^2 .

Zadanie 5. Rozpatrzmy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{5}$. Określmy

$$S_0 = 4, \quad S_n = 4 + \sum_{k=1}^n X_k$$

oraz

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : |S_n| = 15\}.$$

- (a) Wyznaczyć takie $a \in \mathbb{R}$, aby ciąg $M_n = e^{3S_n - an} + e^{-3S_n - an}$ był martyngałem względem naturalnej filtracji.
- (b) Wykazać, że moment stopu τ jest p.n. skończony.
- (c) Obliczyć dla $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest parametrem z punktu (a).