

# Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

## zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w środę **24 kwietnia**.

**Zadanie 1.** Ustalmy liczbę pierwszą  $p \in \mathbb{N}$  i niech  $X, Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na  $\mathbb{Z}_p$ . Dla  $k = 0, 1, \dots, p-1$  określamy  $Z_k = kX + Y$ . Udowodnić, że zmienne losowe  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{p-1}$  nie są niezależne, ale są parami niezależne.

**Zadanie 2.** Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybucją  $F$ . Dla  $k = 1, \dots, n$  niech  $Y_k$  oznacza  $k$ -tą największą spośród zmiennych  $X_1, \dots, X_n$ , w szczególności  $Y_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ . Dla  $k = 1, \dots, n$  znaleźć rozkład zmiennej  $Y_k$ .

**Zadanie 3.** Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne  $X/Y$  oraz  $X + Y$  są niezależne.

**Zadanie 4.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Znaleźć rozkłady zmiennych  $Y = e^X$  i  $Z = X^2$  (wystarczy wyznaczyć ich dystrybuanty w terminach dystrybuanty zmiennej  $X$ ).

**Zadanie 5.** Rzucamy kostką i jeśli wypadło  $k$  oczek, to losujemy liczbę  $Z$  z przedziału  $[0, k]$ . Znaleźć rozkład zmiennej  $Z$ . Czy zmienna ta ma gęstość?