

Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania na ćwiczenia, tydzień 7

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zmienna losowa X ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę F_X . Znajdź rozkład zmiennej $F_X(X)$. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli F_X nie jest ściśle rosnąca lub jest nieciągła?

Zadanie 2. Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$. Niech (X, Y) oznaczają współrzędne wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X . Rozwiązać ten sam problem, jeśli punkt (X, Y) losujemy nie z okręgu, a z koła o promieniu 1.

Zadanie 3. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym Y ma ciągłą dystrybuantę. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Zadanie 4. Zmienna losowa X jest niezależna od siebie samej. Wykaż, że dla pewnej stałej c zachodzi $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Zadanie 5. Załóżmy, że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie ciągłym. Niech U będzie niezależną od nich zmienną losową o rozkładzie $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U = -1) = 1/2$. Niech $S = UX$, $T = UY$. Udowodnić, że S^2 i T^2 są niezależne, ale w ogólności S i T nie muszą być niezależne.

Zadanie 6. Zmienne X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 6$) są niezależne i mają ten sam rozkład, zadany wzorem $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$.

- (a) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_1X_2$ są niezależne?
- (b) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
- (c) Czy zmienne $X_1, X_1X_2, X_1X_2X_3, \dots, X_1X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

Zadanie 7. Załóżmy, że X_1, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Zadanie 8. Niech $r_i: [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem $r_i(t) = \text{sgn} \sin(2^i \pi t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Wykaż, że funkcje r_i traktowane jako zmienne losowe na przestrzeni $\Omega = [0, 1]$ z σ -ciałem borelowskim i miarą Lebesgue'a są niezależne.

Zadanie 9. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ .

- (a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego (wcześniejszego) autobusu.
- (b) Znaleźć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

Zadanie 10. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $g(x, y) = Cxy\mathbb{1}_{0 \leq x \leq y \leq 1}$.

- (a) Wyznaczyć stałą C .
- (b) Czy X i Y są niezależne?
- (c) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
- (d) Wyznaczyć rozkład zmiennej X/Y .
- (e) Czy X/Y oraz Y są niezależne?