

Rachunek prawdopodobieństwa I
semestr letni 2018/2019
zadania na ćwiczenia, tydzień 5

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dwóch graczy rzuca n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?

Zadanie 2. Rzucamy nieskończenie wiele razy *symetryczną* monetą. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów, co reszek. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n .

Zadanie 3. Znajdź σ -ciało generowane przez zmienną losową X , gdy:

- (a) rzucamy kostką i $X = 1$, jeśli wypadła parzysta liczba oczek, a $X = 2$, jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek,
- (b) losujemy punkt z koła o promieniu 1 i środku w punkcie a , $X(w) = |w - a|$.

Zadanie 4. Na przestrzeni $\Omega = [0, 1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym określamy zmienne losowe $X(t) = t(1 - t)$, $Y(t) = \mathbb{1}_{[0, 1/2]}(t)$.

- (a) Wykaż, że X i Y faktycznie są zmiennymi losowymi.
- (b) Wyznacz σ -ciała $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.
- (c) Czy zmienna X jest $\sigma(Y)$ -mierzalna? Czy zmienna Y jest $\sigma(X)$ -mierzalna?
- (d) Wyznacz dystrybuanty zmiennych X i Y .

Zadanie 5. A i B grają w badminton, A wygrywa mecz z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Niech X oznacza czas oczekiwania na k -te zwycięstwo zawodnika A . Wyznaczyć rozkład zmiennej X .

Zadanie 6. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X oznacza minimum, a Y maksimum z uzyskanych liczb oczek. Znajdź rozkłady zmiennych X i Y i sprawdź, że $7 - X$ ma ten sam rozkład, co Y . Czy odpowiedź będzie taka sama, jeśli rzucamy dziesięć razy?

Zadanie 7. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } t \leq 0 < 4, \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$.

Zadanie 8. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ 1 & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

Zadanie 9. Na pewnym skrzyżowaniu zielone światło dla pieszych świeci się przez 30 sekund, a czerwone przez 2 minuty (nie ma światła żółtego). Pieszy przychodzi na skrzyżowanie w losowym momencie czasu.

- (a) Znajdź dystrybuantę czasu oczekiwania przez pieszego na zielone światło.
- (b) Pieszy czeka już minutę na zielone światło. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie musiał czekać jeszcze ponad pół minuty?