

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **8 I 2026**.

Zadanie 1 (Umiejętność rozszerzona – obliczanie sum szeregów). Korzystając z metod analizy zespolonej obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Wskazówka: scałkować funkcję postaci $\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}$ po odpowiednio dobranym konturze.

Zadanie 2 (Umiejętność rozszerzona – zadanie na rozumowanie). Niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną na obszarze U taką, że dla każdego $z \in U$ mamy $f(z) \neq 0$. Załóżmy ponadto, że dla każdego $k \geq 1$ istnieje gałąź pierwiastka stopnia k z f , tzn. taka funkcja holomorfczna $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$, że dla każdego $z \in U$ zachodzi $(g_k(z))^k = f(z)$. Rozstrzygnąć, czy wynika stąd, że istnieje w U gałąź logarytmu f , tzn. taka funkcja holomorfczna $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, że dla każdego $z \in U$ zachodzi $e^{h(z)} = f(z)$.