

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **18 XII 2025**.

Zadanie 1 (Umiejętność podstawowa – szacowanie liczby zer wielomianu). Wykazać, że dokładnie trzy zera wielomianu $z^4 + 6z + 3$ leżą w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 2 (Umiejętność podstawowa – zasada argumentu). Dla ustalonego $n \geq 1$ wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $z^{4n-2} + z^{4n-3} + 2 = 0$ leżących w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zadanie 3 (Umiejętność rozszerzona – zadanie na rozumowanie). Czy istnieje funkcja holomorphyzna $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, która dla każdego $n \geq 2$ spełniałaby tożsamość

$$f\left(\frac{1}{n}\right) f'\left(\frac{1}{n}\right) = 1?$$

Jeżeli tak, to należy znaleźć wszystkie takie funkcje.