

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 8.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla każdego z poniższych wielomianów wyznaczyć liczbę jego pierwiastków wewnątrz dysku jednostkowego $D(0, 1)$:

(a) $z^4 - 5z + 1$

(b) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $a > e$, to równanie $az^n = e^z$ ma dokładnie n rozwiązań wewnątrz dysku jednostkowego $D(0, 1)$.

Zadanie 3. Wykazać, że równanie $(z + 1)e^{-z} = z + 2$ nie ma żadnych rozwiązań w prawej półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$ równanie $1 + z + az^n$, $n \geq 2$, ma co najmniej jedno rozwiązanie w dysku domkniętym $\overline{D(0, 2)}$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : D(0, a) \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną ciągłą na $\overline{D(0, a)}$ taką, że $|f(z)| > c$ na $\partial D(0, a)$ i $|f(0)| < c$. Wykazać, że f ma co najmniej jedno miejsce zero w $D(0, a)$.

Zadanie 6. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $z^7 + 6z^4 + 1$ w prawej półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.