

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 7.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną na obszarze U . Wykazać, że jeśli f jest różnej od stałej i $|f(z)|$ ma minimum lokalne w $z_0 \in U$, to $f(z_0) = 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że U jest obszarem ograniczonym, a $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją ciągłą holomorficzną na U . Wykazać, że jeśli $|f|$ jest stały na brzegu ∂U , to albo f jest funkcją stałą, albo posiada co najmniej jedno miejsce zerowe w U .

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną określoną na pewnym otoczeniu dysku jednostkowego D . Wykazać, że jeśli $f(\partial D) \subseteq \mathbb{R}$, to f jest funkcją stałą.

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja holomorficzna $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ określona na pewnym otoczeniu 0, która spełniałaby warunek $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n .

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ określona na pewnym otoczeniu 0 jest holomorficzna, to warunek $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ może być spełniony tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n .

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ określona na pewnym otoczeniu 0 jest holomorficzna, to warunek $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$ może być spełniony tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n .

Zadanie 7. Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną taką, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$, b) $|\operatorname{Re} f(z)| < |\operatorname{Im} f(z)|$. Wykazać, że w każdym z tych przypadków f jest funkcją stałą.

Zadanie 8. Załóżmy, że $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ są funkcjami holomorficznymi takimi, że $|f(z)| < |g(z)|$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że wówczas $f(z) = \lambda g(z)$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$.

Zadanie 9. Załóżmy, że $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną na dysku jednostkowym, przy czym dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Zadanie 10. Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją całkowitą. Wykazać, że zbiór $f(\mathbb{C})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.