

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 6.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{8e}.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną. Obliczyć całkę

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

gdzie D jest dyskiem o środku w 0 i promieniu r , a $a, b \in D$. Wywnioskować stąd twierdzenie Liouville'a.

Zadanie 3. Załóżmy, że $P(z)$ i $Q(z)$ są dwoma wielomianami, przy czym $\deg Q > \deg P + 1$. Wykazać, że $\int_{\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$ dla każdego dysku zawierającego wszystkie zera wielomianu Q .

Zadanie 4. Przekształcić w sposób różnowartościowy i konforemny ćwiartkę koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ na górną półpłaszczyznę $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Zadanie 5. Wyznaczyć obraz prostokąta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0, \frac{\pi}{2}), \operatorname{Im} z \in (0, a)\}$ przy odwzorowaniu $z \mapsto \sin z$. Czy odwzorowanie to jest konforemne?