

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 5.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla $r > 0$ niech $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie drogą określoną równaniem $\gamma_r(t) = re^{it}$. Wykazać, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$. Dla ustalonego $\theta \in (0, 2\pi]$ niech $\gamma_\varepsilon = \{z_0 + \varepsilon e^{it} : t \in [0, \theta]\}$. Wykazać, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi i f(z_0).$$

Zadanie 3. Wykazać, że

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$

(c) $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$