

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 4.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zdefiniujmy dwie drogi γ_1, γ_2 jako $\gamma_1(t) = e^{it}$ oraz $\gamma_2(t) = e^{-it}$, gdzie w obu przypadkach $t \in [0, \pi]$. Obliczyć całki po drogach:

(a) $\int_{\gamma_k} z \, dz, k = 1, 2$

(b) $\int_{\gamma_k} \bar{z} \, dz, k = 1, 2$

Zadanie 2. Obliczyć całkę $\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} \, dz$ dla konturu Γ będącego:

(a) okręgiem o środku w 0 i promieniu $\frac{1}{2}$

(b) okręgiem o środku w 0 i promieniu 2

Zadanie 3. Niech $[a, b]$ będzie odcinkiem łączącym punkty $a, b \in \mathbb{C}$. Wykazać, że równość

$$\overline{\int_{[a,b]} f(z) \, dz} = \int_{[a,b]} \overline{f(z)} \, dz$$

jest spełniona dla wszystkich funkcji ciągłych $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b - a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Korzystając z całkowania po odpowiednio dobranym konturze obliczyć całki:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \, dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} \, dx$