

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 2.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) są dwiema trójkami parami różnych liczb z rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\bar{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia h taka, że $h(z_i) = w_i$ dla $i = 1, 2, 3$.

Zadanie 2. Dla czwórki parami różnych punktów (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_i \in \bar{\mathbb{C}}$, określamy ich *dwustosunek* jako

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

- (a) Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek.
- (b) Wykazać, że jeśli $(z_1, z_2 : z_3, z_4) = (w_1, w_2 : w_3, w_4)$, to istnieje homografia przeprowadzająca czwórkę punktów (z_1, z_2, z_3, z_4) na czwórkę punktów (w_1, w_2, w_3, w_4) .

Zadanie 3. Wykazać, że każda homografia h różna od identyczności ma co najmniej jeden i co najwyżej dwa punkty stałe w $\bar{\mathbb{C}}$. Wykazać, że jeżeli jedynym punktem stałym h jest ∞ , to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, natomiast jeśli punktami stałymi h są 0 i ∞ , to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$.

Zadanie 4.

- (a) Wykazać, że jeśli homografia h ma dwa różne punkty stałe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, to spełnia równanie

$$\frac{h(z) - \alpha}{h(z) - \beta} = A \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

dla pewnego $A \neq 0$.

- (b) Wykazać, że jeśli homografia h ma dokładnie jeden punkt stały $\alpha \in \mathbb{C}$, to spełnia równanie

$$\frac{1}{h(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h$$

dla pewnego $h \neq 0$.

Zadanie 5. Dla ustalonego $z_0 \in \mathbb{C}$ i homografii h określamy ciąg $z_{n+1} = h(z_n)$, $n \geq 0$. Zbadać zbieżność ciągu z_n w zależności od postaci homografii.

Zadanie 6. Wykazać, że homografia $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przekształca górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}_+$ na dysk jednostkowy D . Jak wyglądają przy tym przekształceniu obrazy prostych $\operatorname{Re} z = \text{const}$, $\operatorname{Im} z = \text{const}$ oraz okręgów $|z| = \text{const}$?