

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 1.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że dowolną homografię $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ można przedstawić jako złożenie przesunięcia ($z \mapsto z + \alpha$), inwersji ($z \mapsto \frac{1}{z}$) i podobieństwa ($z \mapsto Az + B$).

Zadanie 2. Rozpatrzmy dwie homografie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ oraz $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$.

- (a) Wykazać, że ich złożenie $f \circ g$ również jest homografią.
- (b) Wykazać, że jeżeli $ad - bc \neq 0$, to f jest bijekcją rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\bar{\mathbb{C}}$. Wywnioskować, że homografie spełniające $ad - bc \neq 0$ tworzą grupę.
- (c) Niech $SL(2, \mathbb{C}) = \{M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det M = 1\}$. Oznaczmy grupę wszystkich homografii spełniających $ad - bc \neq 0$ przez H . Wykazać, że odwzorowanie $\phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow H$ dane jako

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

jest homomorfizmem i surjekcją. Wykazać, że $\ker \phi = \{\pm I\}$ i wywnioskować stąd, że zachodzi izomorfizm grup $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} \simeq H$.

Zadanie 3. Wykazać, że obrazem okręgu lub prostej przy homografii jest okrąg lub prosta. Udowodnić, że jeśli S jest okręgiem lub prostą i T jest okręgiem lub prostą, to istnieje homografia przeprowadzająca S na T .