

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania na ćwiczenia, tydzień 12.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{1-z}$ w szereg Taylora oraz w szereg Laurenta wokół $z = 0$ i określić, na jakim zbiorze szeregi te są zbieżne.

Zadanie 2. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ a) w szereg Taylora wokół $z = 0$ w dysku $\{|z| < 1\}$, b) w szereg Laurenta wokół $z = 0$ w pierścieniu $\{1 < |z| < 2\}$, c) w szereg Laurenta wokół $z = 0$ w zbiorze $\{|z| > 2\}$.

Zadanie 3. Rozwinąć poniższe funkcje w szereg Laurenta wokół podanego punktu z_0 :

(a) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$, $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi}$, $z_0 = \pi$

Zadanie 4. Obliczyć residua:

(a) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z+z^2}$

(b) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+a^4}$, gdzie $z_0^4 + a^4 = 0$

(d) $\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$

(e) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin az}{z^3 \sin bz}$, $b \neq 0$

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całki:

(a) $\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$, $\Gamma = \partial D(1, 1)$

(b) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz$, $\Gamma = \partial D(0, 2)$

(c) $\int_{\Gamma} z^2 e^{1/z} dz$, $\Gamma = \partial D(0, 1)$

(d) $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{\exp(2\pi iz^3)-1} dz$, $\Gamma = \partial D(0, R)$