

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria dodatkowa

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **23 I 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $|x| < 1$, to dla $k = 0, 1, 2, \dots$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{k+1}.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Dla $n \geq 1$ określamy rekurencyjnie ciąg

$$x_{n+1} = -\ln(x_1 + \dots + x_n).$$

Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny i obliczyć jego sumę.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln \ln n}$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2c^2)^n}{n \ln n + \cos(n\pi)}.$$

Zadanie 5. Podać taką permutację wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, aby jego suma zmniejszyła się dwukrotnie.