Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria 7.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **9 I 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym do 0. Rozpatrzmy dowolny rosnący ciąg liczb całkowitych l_n taki, że $l_0 = 0$, i zdefiniujmy

$$A_n = a_{l_{n-1}+1} + a_{l_{n-1}+2} + \ldots + a_{l_n}.$$

Wykazać, że jeśli ciąg $l_{n+1} - l_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbieżny.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$

(b) $a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^\alpha + (\sqrt{n}+1)^\beta}$, $\alpha, \beta \geqslant 0$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{n}.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdot \ldots \cdot (a+n)}{b(b+1)\cdot \ldots \cdot (b+n)}$$

w zależności od $a, b > 0$.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie.