Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we w czwartek **14 XII 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Wyznaczyć następujące granice:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{\frac{1}{\pi}}}{1-x^{\frac{1}{e}}}$

(b) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

(c) $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2-\pi^2}$

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2}, & |x| > 1, \\ ax^2+bx+c, & |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

gdzie $a, b, c, \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć wartości parametrów a, b, c tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągła spełniającą warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Wykazać, że istnieje takie $x_0 \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right]$, że $f(2x_0) - f(x_0) = 1$.

Zadanie 4. Załóżmy, że funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją. Wykazać, że f musi mieć nieskończenie wiele punktów nieciągłości.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz istnieją skończone granice $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wykazać, że f jest ograniczona.