

# Analiza matematyczna I.1

## semestr zimowy 2023/2024

### zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **31 X 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Wykazać, że liczba  $\sqrt{n^2 + 3n}$  jest niewymierna dla każdego naturalnego  $n \geq 2$ .

**Zadanie 2.** Załóżmy, że  $a_n$  jest ciągiem zbieżnym. Wykazać, że  $a_n$  zawiera wyraz największy lub najmniejszy – innymi słowy, że dla  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  co najmniej jeden z kresów  $\inf A$ ,  $\sup A$  jest osiągnięty.

**Zadanie 3.** Zbadać, czy poniższe ciągi są zbieżne, a jeśli tak, to wyznaczyć granicę:

(a)  $a_n = \sqrt[n]{n!}$

(b)  $b_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ , gdzie  $\alpha \in (0, 1)$

(c)  $c_n = nq^n$ , gdzie  $|q| < 1$

**Zadanie 4.** Załóżmy, że  $a_n$  jest ciągiem o wyrazach dodatnich. Wykazać, że jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ , gdzie  $g \in \mathbb{R}$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$ .

**Zadanie 5.** Zbadać, czy poniższe ciągi są zbieżne, a jeśli tak, to wyznaczyć granicę:

(a)  $a_n = \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$

(b)  $b_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

(c)  $c_n = n \left( \sqrt[k]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$