

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 7 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać nierówności:

- (a) $e^x \geq 1 + x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$
- (b) $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, gdzie $x < 1$
- (c) $\ln(1+x) \leq x$, gdzie $x > -1$
- (d) $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$, gdzie $x > -1$

Zadanie 2. Wywnioskować z poprzedniego zadania, że dla dowolnego ciągu a_n zbieżnego do 0 mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1,$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1.$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla $\alpha > 0$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0.$$

Zadanie 4. Obliczyć następujące granice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2+20n+5)}{\ln(n^9-3n+12)}$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt[n]{\ln n}\right)$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, gdzie $a > 0$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$