

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 31 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech a_n będzie ciągiem Fibonacciego, zdefiniowanym dla $n \in \mathbb{N}$ rekurencyjnie jako

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 = 1, \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n.\end{aligned}$$

Wykazać, że

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

gdzie α, β są pierwiastkami równania $x^2 - x - 1 = 0$, a następnie wyznaczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Zadanie 2. Dla liczb dodatnich x_1, \dots, x_k wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n}{k}}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że a_n jest ciągiem ograniczonym spełniającym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ warunek $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$. Wykazać, że ciąg a_n jest zbieżny.

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciągi a_n, b_n zdefiniowane rekurencyjnie jako

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

przy czym zakładamy $0 < b_1 < a_1$. Wykazać, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy.

Zadanie 5. Rozpatrzmy ciągi a_n, b_n zdefiniowane jako

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n, \\ b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n.\end{aligned}$$

Wykazać, że ciąg a_n jest rosnący, a ciąg b_n malejący, a następnie wykazać, że oba są zbieżne do tej samej granicy.

Zadanie 6. Wyznaczyć granicę następujących ciągów

(a) $a_n = \left(\frac{3n-11}{3n+1}\right)^{n+4}$

(b) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$

(c) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$