

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 26 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć granicę ciągu

(a) $a_n = \frac{n}{n^2+1} \sin(3n + 1)$

(b) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \sqrt{2n+1}$

(c) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

(d) $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, gdzie P, Q są wielomianami

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli dla ciągu liczb dodatnich a_n istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$, to ciąg a_n jest zbieżny do 0.

Zadanie 3. Wykazać zbieżność ciągu

(a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$

Zadanie 4. Wykazać zbieżność ciągu a_n zadanego rekurencyjnie

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}, \end{cases}$$

a następnie obliczyć jego granicę.

Zadanie 5. Wykazać zbieżność ciągu a_n zadanego rekurencyjnie

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \sqrt{a_n}, \end{cases}$$

a następnie obliczyć jego granicę.