

Analiza matematyczna I.1  
semestr zimowy 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 24 X 2023

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Wykazać korzystając wprost z definicji granicy ciągu, że

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} = 0$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

**Zadanie 2.** Załóżmy, że  $a_n$  jest ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ .  
Wykazać, że wówczas  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Zadanie 3.** Załóżmy, że  $a_n$  jest ciągiem o wyrazach nieujemnych takim, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ .  
Wykazać, że wówczas  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Zadanie 4.** Wykazać, że

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  dla  $a > 0$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

*Wskazówka:* użyć nierówności Bernoulliego i/lub wzoru dwumianowego Newtona.