Analiza matematyczna I.1

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 23 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła i ograniczona, to musi być stała.

Zadanie 2. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (dopuszczamy $a = -\infty$, $b = \infty$). Wykazać, że albo f jest monotoniczna, albo istnieje takie $c \in (a, b)$, że

$$f(c) = \min\{f(x) \,:\, x \in (a, b)\}$$

oraz f jest malejąca na $(a, c]$ i rosnąca na $[c, b)$.

Zadanie 3. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (dopuszczamy $a = -\infty$, $b = \infty$). Wykazać, że istnieją (być może nieskończone) granice jednostronne $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

Zadanie 4. Korzystając z nierówności Höldera wykazać *nierówność Minkowskiego*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

gdzie $p \geqslant 1$ oraz $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest zbieżny. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{4}{5}}}$$

również jest zbieżny.