

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 16 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że a_n i b_n są ciągami dodatnimi monotonicznie zbieżnymi do 0. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_0 + b_1 + \dots + b_n) = 0$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = 0.$$

Zadanie 2. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$, $\alpha, \beta > 0$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + \beta > 1$.

Zadanie 3. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ przez siebie samego i wyznaczyć jego sumę.