

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 5 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć kresy zbioru

$$G = \left\{ \frac{xy}{x^2 + y^2 + x^2y^2} \mid x, y > 0 \right\}.$$

Czy są one osiągane?

Zadanie 2. Wykazać wzory

(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnych liczb $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$, zachodzi nierówność

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że liczby x_1, \dots, x_n mają ten sam znak oraz $x_i > -1$ dla $i = 1, \dots, n$. Wykazać nierówność

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

oraz wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.