

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 12 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy malejący ciąg liczb nieujemnych a_n taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wykazać, że wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. Czy założenie, że a_n jest malejący, jest istotne?

Zadanie 2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla:

(a) $a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $a_n = \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Zadanie 3. Załóżmy, że $a_n > 0$ jest wyrazem szeregu rozbieżnego. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$