

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 21 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykazać, że f jest ciągła jedynie w punkcie $x = 0$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{NWD}(p, q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykazać, że f jest ciągła w $x = 0$ oraz dla wszystkich $x \notin \mathbb{Q}$, natomiast jest nieciągła dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$.

Zadanie 3. Obliczyć następujące granice

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, a, b > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\sqrt{x}}$