

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 16 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać dla dowolnego ciągu a_n o wyrazach dodatnich nierówności

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Zadanie 2. Rozpatrzmy ciąg a_n taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Niech $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Wykazać, że dowolna liczba z przedziału (l, L) jest punktem skupienia ciągu a_n .

Zadanie 3. Załóżmy, że ciąg a_n ma następującą własność: istnieje $\lambda \in (0, 1)$ takie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|.$$

Wykazać, że wówczas ciąg a_n jest zbieżny.