

Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 14 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ oraz $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ dla:

(a) $a_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

(b) $a_n = (-1)^n n$

(c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$

Zadanie 2. Przy założeniu, że wszystkie występujące poniżej wyrażenia są skończone, wykazać dla ciągów a_n, b_n nierówności

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

oraz wskazać przykłady, że w ogólności nie zachodzi w nich równość.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli ciąg a_n spełnia dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ warunek

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m,$$

to istnieje skończona granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.